

SUR LES SÉRIES ZÉTAFUCHSIENNES

THÈSE POUR LE DOCTORAT

PAR

ARVID UHLER



GLEERUPSKA UNIVERSITETS-BOKHANDELN - LUND

1924

SUR LES SÉRIES ZÉTA-FUCHSIENNES

THÈSE POUR LE DOCTORAT

PRÉSENTÉE À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LUND ET
PUBLIQUEMENT SOUTENUE LE 23 AVRIL 1921 À 10 HEURES
DU MATIN DANS LA SALLE N° VII.

PAR

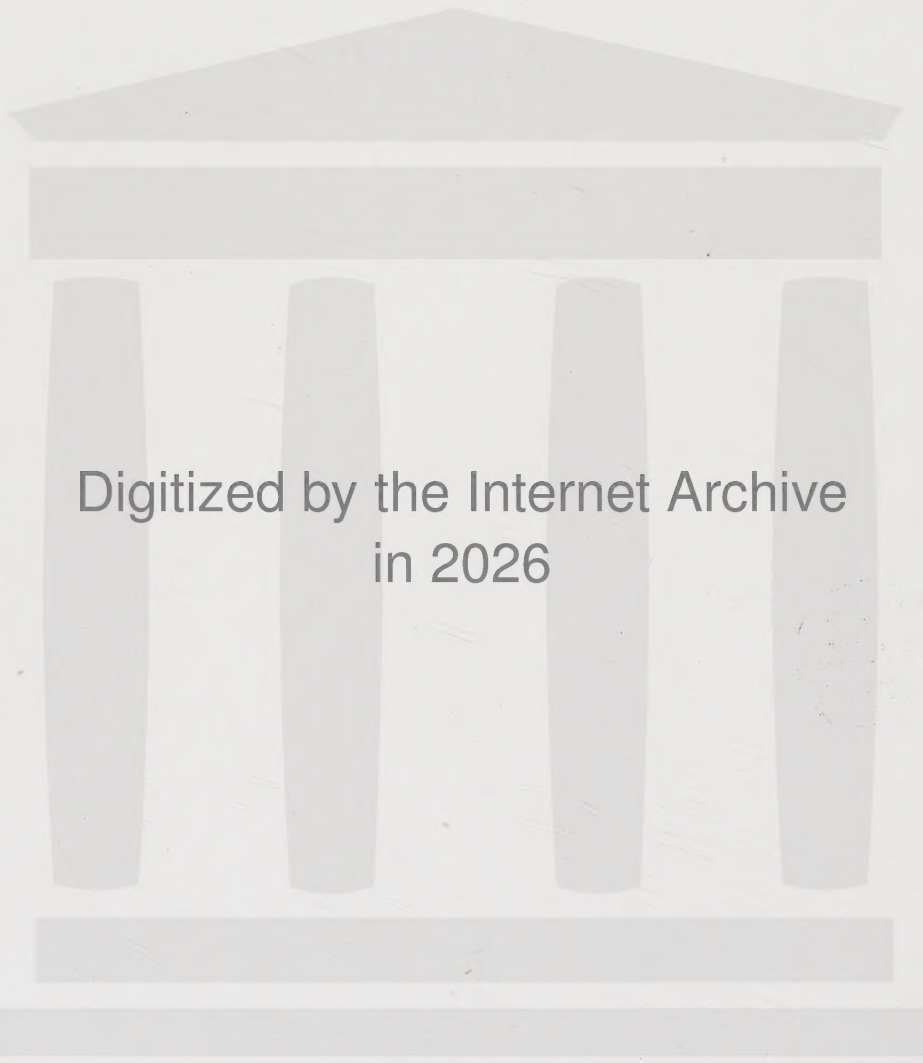
ARVID UHLER

LICENCIÉ ÈS SCIENCES, KR.



LUND 1921

IMPRIMERIE HÅKAN OHLSSON



Digitized by the Internet Archive
in 2026

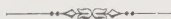
https://archive.org/details/IA41553402_0054

SUR LES SÉRIES ZÉTAFUCHSIENNES

THÈSE POUR LE DOCTORAT

PAR

ARVID UHLER



LUND 1921

IMPRIMERIE HÅKAN OHLSSON

INTRODUCTION.

Dans une série de travaux* Poincaré a présenté la théorie des fonctions fuchsiennes et zétafuchsiennes. Ces recherches de Poincaré ont été le point de départ d'autres études dans ce domaine des mathématiques et les travaux qui ont été faits depuis ces recherches doivent être considérés comme une mise au point et un développement des idées de Poincaré.

Dans un de ces travaux *Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes* Poincaré considère une équation linéaire

$$(1) \quad \frac{d^n v}{dx^n} + \sum_{k=0}^{k=n-1} \varphi_k(x, y) \frac{d^k v}{dx^k} = 0$$

$$\psi(x, y) = 0$$

où $\varphi_k(x, y)$ et $\psi(x, y)$ sont des fonctions rationnelles et telles que l'équation n'a que des points singuliers réguliers. Il forme ensuite une équation auxiliaire

$$\frac{d^2 \omega}{dx^2} = \theta(x, y) \omega$$

où $\theta(x, y)$ est une fonction rationnelle choisie de telle manière que x soit une fonction fuchsienne de rapport z entre les intégrales. Poincaré montre alors que l'on peut déterminer $\theta(x, y)$ de telle manière que les intégrales de l'équation (1) soient des fonctions uniformes de z , qui, lorsque z subit une substitution linéaire du groupe fuchsien g , subissent une substitution linéaire homogène appartenant à un groupe G . Poincaré appelle ces fonctions zétafuchsiennes et il les étudie en étroite relation avec les équations linéaires (1). Il montre que toutes les fonctions zétafuchsiennes peuvent être représentées comme le quotient entre des séries de forme

* Théorie des groupes fuchsien, Acta Mathematica, t. I, p. 1—62 (1882).

Sur les fonctions fuchsiennes, Acta Mathematica, t. I, p. 193—294 (1882).

Sur les groupes des équations linéaires, Acta Mathematica, t. IV, p. 201—311 (1884).

Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes, Acta Mathematica, t. V, p. 209—278 (1884).

$$(2) \quad \sum_i (H_\nu(\zeta_{S_i})) S_i^{-1} \frac{1}{(\gamma_i \zeta + \delta_i)^{2m}}$$

et

$$\sum_i (K_\nu(\zeta_{S_i})) \frac{1}{(\gamma_i \zeta + \delta_i)^{2m}}$$

où $H_\nu(\zeta)$ et $K_\nu(\zeta)$ sont fonctions rationnelles.

Pour éviter des difficultés de forme il se limite aux fonctions qui ont le cercle fondamental pour cercle limite et qui sont de genre 0. Il admet en outre $n=2$. La difficulté qui se produit par le fait que les séries divergent lorsque les racines de l'équation fondamentale des substitutions S_i n'ont pas le module 1, n'a pu être surmontée par lui.

Les recherches de Poincaré ont été reprises par Ritter dans son travail * *Über Riemannsche Formenscharen auf einem beliebigen algebraischen Gebilde*. Il y étudie sur une surface de Riemann des fonctions qui lorsqu'on fait décrire à la variable un contour périodique ou un contour autour de points singuliers subissent des substitutions linéaires homogènes. Il se sert pour cela de variables homogènes. Il avait l'intention, en représentant les formes sur un réseau des polygones, d'étudier plus en détail les formes zétafuchsiennes, de même qu'il avait étudié par le même procédé les formes automorphes **. Ces recherches ont été cependant interrompues par sa mort. Elles ont été reprises par M. Caspar *** qui pourtant se borne aux cas où le cercle fondamental est le cercle limite et où manquent les points singuliers.

Dans les premiers chapitres de ce travail je complète les recherches de Ritter. Pour pouvoir me servir des résultats qu'il a obtenus j'emploie des variables homogènes, bien que dans la seconde partie je revienne au procédé d'exposition de Poincaré.

Dans le troisième chapitre j'étudie des séries ayant les mêmes propriétés que les séries (2), analogues à celles que Poincaré a formées pour les fonctions modulaires †. A l'aide de ces séries, je puis établir la condition pour la disparition identique des séries zétafuchsiennes. Je me borne ici à l'étude des fonctions qui ont le cercle fondamental pour cercle limite et où le groupe g a au moins une substitution parabolique ou elliptique. Je désigne ces fonctions par

* Math. Annalen, Bd. 47, p. 157—221 (1896).

** Die multiplikativen Formen auf algebraischen Gebilde beliebigen Geschlechts mit Anwendung auf die Theorie der automorphen Formen. Math. Annalen, Bd. 44, p. 261—374 (1894).

*** Über die Darstellbarkeit der homomorphen Formenscharen durch Poincarésche Z -Reihen. (Diss.)

† Fonctions modulaires et fonctions fuchsiennes. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3^e série, t. 3, p. 125—149 (1912).

$\Psi_{\mu\nu}(\zeta; tm)$, où t peut prendre des valeurs entières positifs ou négatifs. Pour valeurs positifs de t les fonctions sont finis et parmi elles je puis choisir un système des fonctions linéairement indépendants à l'aide desquelles l'on peut exprimer toutes les autres linéairement. On peut aussi exprimer linéairement les séries entières Z de Poincaré par ces fonctions linéairement indépendants. Des fonctions $\Psi_{\mu\nu}(\zeta; tm)$ avec des valeurs négatifs de t sont partout finis sauf dans certains sommets. Ces fonctions sont donc plus générales que les séries Z de Poincaré qui nécessairement ont zéros aux sommets paraboliques.

J'ai admis sur cet étude des séries zétafuchsiennes que l'équation fondamental des substitutions critiques a des racines, dont le module est 1. Si ce n'est pas le cas, les séries divergent. Il est probable que l'on peut se servir des séries par leur sommation. Cependant ce problème n'est pas encore résolu.

Enfin je prie mes maîtres bien aimés et bien vénérés, MM. T. Brodén et N. E. Nörlund, professeurs de mathématiques à l'université de Lund, d'agréer l'expression de ma profonde reconnaissance pour la superbe direction de mes études et le grand intérêt qu'ils m'ont toujours accordé.

Je veux aussi adresser ici mes remerciements à M. Pinot, licencié ès lettres, pour l'aide de la traduction et de la correction des épreuves.

CHAPITRE I.

§ 1. Sur une surface de Riemann de genre p , que nous supposons dans une forme canonique, admettons s points singuliers e_i ($i=1, 2 \dots s$). Nous supposons que nous avons $2p$ substitutions A_H et B_H ($H=1, 2 \dots p$), correspondant aux contours périodiques sur la surface et s substitutions S_i , correspondant à la rotation autour des points singuliers e_i . Les substitutions A_H , B_H et S_i constituent des substitutions fondamentales dans un groupe G .

Il existe donc n fonctions $\Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_n$ sur la surface, qui ont les propriétés suivantes:

Si l'on opère une rotation sur la surface suivant les contours périodiques et respectivement une rotation autour de l'un des points singuliers, Π_v devient une combinaison linéaire des autres fonctions. Soit ces substitutions A_H , B_H respectivement S_i . Ces fonctions dans les points singuliers ne sont cependant pas déterminées seulement par les substitutions A_H , B_H et S_i . Nous admettons alors comme donné pour chaque point e_i un système d'exposant $\lambda_{1i} \dots \lambda_{ni}$, choisi d'accord avec les substitutions S_i .

Pour l'étude des fonctions Π_v , on a avantage à se servir d'un procédé d'exposition homogène. Posons donc $z = \frac{z_1}{z_2}$. Par Π_v nous voulons désigner dans ce qui suit des formes des z_1 et z_2 , que nous admettons avoir le degré δ , compté dans les formes premières multiplicatives sur la surface. Si l'on maintient z_2 les substitutions, répondant aux rotations données précédemment, doivent être A_H , B_H et S_i .

Selon Ritter on a alors

$$(3) \quad B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} A_1 B_2 A_2^{-1} B_2^{-1} A_2 \dots B_p A_p^{-1} B_p^{-1} A_p S_1 \dots S_s = e^{2\pi i \delta}$$

Le déterminant de la substitution est $e^{2\pi i \lambda_i}$, avec

$$\lambda_i = \lambda_{1i} + \dots + \lambda_{ni}$$

D'où il suit que

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i = n\hat{c}$$

doit être un nombre entier.

Deux systèmes de formes Π et Ω sont réciproques si

$$\Pi_1 \Omega_1 + \Pi_2 \Omega_2 + \dots + \Pi_n \Omega_n = \prod_{i=1}^{i=s} [P(z e_i)]^{\mu_i} \Phi(z_1 z_2)$$

où $\Phi(z_1 z_2)$ est une forme algébrique du degré $2p - 2$ et $P(z e_i)$ une forme première multiplicative sur la surface. Si δ est le degré de Π et $\bar{\delta}$ le degré de Ω on trouve

$$\delta + \bar{\delta} = \sum_{i=1}^{i=s} \mu_i + 2p - 2$$

Soit $\bar{\lambda}_{vi}$ le système d'exposant pour Ω . On a alors la relation

$$\lambda_{vi} + \bar{\lambda}_{vi} = \mu_i$$

§ 2. Nous considérons notre surface de Riemann comme ramifiée aux points e_i . Si le système d'exposant λ_{vi} , appartenant aux point e_i , a un dénominateur commun l_i , nous considérons notre surface comme ramifiée par l'ordre l_i . Cela cependant à la condition que λ_{vi} soient tous différents et que leurs différences ne soient des pas nombres entiers. Dans ce cas et dans le cas où manque un commun dénominateur, nous considérons la surface comme ramifiée en e_i en un nombre infini de feuilles. La surface ainsi proposée peut alors par la fonction linéaire-polymorphe $\zeta = \varphi(z)$ être représentée dans un réseau de polygones dans le plan ζ . Le réseau de polygones peut être tout entier à l'intérieur du cercle fondamental et avoir ce cercle pour cercle limite, mais il peut, si la surface de Riemann est ortosymétrique, s'étendre sur tout le plan.

Les fonctions Π_v deviennent par cette transformation des fonctions de ζ uniformes et inramifiée dans le réseau de polygones.

Séparons maintenant ζ en ζ_1 et ζ_2 de telle sorte que $\zeta = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ et considérons ζ_1 et ζ_2 comme deux variables indépendantes qui cependant ne peuvent devenir infinies ni devenir zéro toutes les deux simultanément. Considérons alors des formes de ces variables qui sont inramifiées pour les valeurs permises de ζ_1 et ζ_2 et qui lorsque ζ_1 et ζ_2 décrivent une ligne continue jusqu'au système de points équivalents

$$\zeta_1' = \alpha \zeta_1 + \beta \zeta_2; \quad \zeta_2' = \gamma \zeta_1 + \delta \zeta_2; \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

deviennent

$$\Pi_{\nu}(\alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2; \gamma\zeta_1 + \delta\zeta_2) = \mu(C_{\nu}' \Pi_1 + C_{\nu}'' \Pi_2 + \dots + C_{\nu}^{(n)} \Pi_n)$$

où μ est une constante et où la substitution donnée appartient au groupe G .

Désignons par analogie avec les formes automorphes nos formes Π_{ν} comme inramifiées si

$$(\zeta\alpha)^{-d} \Pi_{\nu}(\zeta_1\zeta_2)$$

sont des fonctions inramifiées de ζ et si on a $\alpha_1 : \alpha_2 \pm \zeta_1 : \zeta_2$ au point en question.

Nous avons posé ici

$$(\zeta\alpha) = \alpha_2\zeta_1 - \alpha_1\zeta_2$$

Nous voulons maintenant examiner les formes dans un lieu ζ_0 , qui ne se trouve pas à un sommet.

Nous posons $t = \zeta - \zeta_0$ ou $t = \frac{1}{\zeta}$ selon que ζ_0 est fini ou infini.

On trouve alors

$$\Pi_{\nu}(\zeta_1\zeta_2) = (\zeta\alpha)^{d'} \cdot t^m [a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)}t + \dots];$$

Si ζ_0 se trouve à un sommet elliptique ε et si ε' est l'autre sommet, répondant à la même substitution s de ζ , on a

$$\Pi_{\nu}(\zeta_1\zeta_2) = (\zeta\varepsilon')^d \left[a_0^{(\nu)} \left(\frac{\zeta - \varepsilon}{\zeta - \varepsilon'} \right)^m + a_1^{(\nu)} \left(\frac{\zeta - \varepsilon}{\zeta - \varepsilon'} \right)^{m+1} + \dots \right].$$

Admettons maintenant que les coefficients de substitution pour la substitution S , répondant à la substitution s , soient $A_{\nu\omega}$.

Par suite de la relation

$$\Pi_{\nu}(\zeta_1' \zeta_2') = \mu(A_{\nu 1} \Pi_1 + A_{\nu 2} \Pi_2 + \dots + A_{\nu n} \Pi_n)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} & e^{-\pi i \frac{d}{l}} (\zeta\varepsilon')^d \left[a_0^{(\nu)} \left(\frac{\zeta - \varepsilon}{\zeta - \varepsilon'} \right)^m e^{\frac{2\pi i m}{l}} + a_1^{(\nu)} \left(\frac{\zeta - \varepsilon}{\zeta - \varepsilon'} \right)^{m+1} e^{\frac{2\pi i (m+1)}{l}} + \dots \right] = \\ & = (\zeta\varepsilon')^d \left[(\mu A_{\nu 1} a_0^{(1)} + \mu A_{\nu 2} a_0^{(2)} + \dots + \mu A_{\nu n} a_0^{(n)}) \left(\frac{\zeta - \varepsilon}{\zeta - \varepsilon'} \right)^m + \dots \right] \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mu A_{\nu 1} a_i^{(1)} + \mu A_{\nu 2} a_i^{(2)} + \dots + \mu A_{\nu n} a_i^{(n)} &= e^{\frac{2\pi i}{l} \left(m_i - \frac{d}{2} \right)} a_i^{(\nu)} \\ m_i &= m + i \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Pour que maintenant tous les $a_i^{(v)}$ ne puissent pas disparaître, il faut que

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \omega, & A_{12}, & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22} - \omega, & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}, & A_{n2} & \dots & \dots & A_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

où

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{l} \left(m_i - \frac{d}{2} \right) \mu^{-1}}$$

Cette équation nous donne n racines de ω

$$\omega_v = e^{2\pi i \lambda_{vi}}$$

μ doit alors être une racine de l'unité, soit $e^{\frac{2\pi i}{l} r}$.

On a alors

$$m_v \equiv \frac{d}{2} + r + \lambda_{vi} l \pmod{l}$$

où m_v sont les exposants de $\left(\frac{\zeta - \varepsilon}{\zeta - \varepsilon'} \right)$ qui se produisent dans le développement de $\Pi_v(\zeta_1 \zeta_2)$.

Nous pouvons alors écrire

$$\Pi_v(\zeta_1 \zeta_2) = \sum_v (\zeta \varepsilon')^d \left(\frac{\zeta - \varepsilon}{\zeta - \varepsilon'} \right)^{m_v} \left[a_0^{(v)} + a_1^{(v)} \left(\frac{\zeta - \varepsilon}{\zeta - \varepsilon'} \right)^l + a_2^{(v)} \left(\frac{\zeta - \varepsilon}{\zeta - \varepsilon'} \right)^{2l} + \dots \right].$$

Les sommets paraboliques ne doivent pas être des points essentiellement singuliers.

Nous représentons donc le voisinage d'un semblable point ε au voisinage

de $t=0$ par $t = e^{\frac{2\pi i}{l} \cdot \frac{1}{\zeta - \varepsilon}}$.

Nous obtenons, par suite, le développement suivant de nos formes dans le voisinage de $\zeta = \varepsilon$

$$\begin{aligned} \Pi_v(\zeta_1 \zeta_2) = (\zeta \varepsilon')^d & \left[t^{m_1} (a_{10}^{(v)} + a_{11}^{(v)} t + \dots) + t^{m_1} \frac{1}{\zeta - \varepsilon} (a_{20}^{(v)} + a_{21}^{(v)} t + \dots) + \dots \right. \\ & + t^{m_1} \frac{1}{(\zeta - \varepsilon)^{p_1 - 1}} (a_{p_1 0}^{(v)} + a_{p_1 1}^{(v)} t + \dots) + \dots + t^{m_q} (a_{q0}^{(v)} + \dots) + \\ & \left. + t^{m_q} \frac{1}{\zeta - \varepsilon} (a_{q0}^{(v)} + \dots) + \dots \right] \end{aligned}$$

où $\omega_\nu = e^{2\pi i m_\nu}$ sont des racines d'ordre ρ_ν de l'équation

$$\begin{vmatrix} \mu A_{11} - \omega_\nu & \mu A_{12} & \dots & \mu A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu A_{n1} & \mu A_{n2} & \dots & \mu A_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

§ 3. Séparons maintenant ζ en ζ_1 et ζ_2 de telle sorte que

$$(4) \quad \zeta_1 = \frac{\zeta}{\sqrt{\frac{d\zeta}{d\omega_x}}} \prod_{i=1}^{i=s} P(ze_i)^{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{l_i}\right)}; \quad \zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{d\zeta}{d\omega_x}}} \prod_{i=1}^{i=s} P(ze_i)^{-\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{l_i}\right)}$$

où $d\omega_x$ est une différentielle partout finie et ne disparaissant nulle part sur la surface de Riemann.

Aux valeurs permises de z_1 et z_2 correspondent les valeurs permises de ζ_1 et ζ_2 .

Les formes $\Pi_\nu(\zeta_1 \zeta_2)$ deviennent par suite des formes inramifiées de ζ_1 et ζ_2 d'un nombre de degrés qui est déterminé par l'égalité

$$\partial = \frac{d}{\nu}$$

où ν est la dimension de z_1 et z_2 , considérées comme formes de ζ_1 et ζ_2 .

Par suite de (4) on obtient

$$(5) \quad \frac{1}{\nu} = -p + 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=s} \left(1 - \frac{1}{l_i}\right)$$

Si z_1 et z_2 décrivent un contour fermé sur la surface de Riemann, ζ_1 et ζ_2 subissent les substitutions

$$\zeta_1' = \tau(\alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2); \quad \zeta_2' = \tau(\gamma\zeta_1 + \delta\zeta_2); \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

où τ est une constante qui est déterminée pour chaque rotation.

Cela à la condition qu'aucune rotation ne soit décrite autour de $z_2 = 0$.

Dans une semblable rotation:

$$\zeta_1' = \tau_1 \zeta_1; \quad \zeta_2' = \tau_1 \zeta_2$$

On a donc dans une rotation

$$\Pi_\nu(\zeta_1' \zeta_2') = \tau_1^d \tau^d \Pi_\nu(\alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2; \gamma\zeta_1 + \delta\zeta_2) = \tau_1^d T(\Pi_\nu(\zeta_1 \zeta_2))$$

où T est une substitution, appartenant au groupe G .

Si l'on admet que d est un nombre entier, τ^d est complètement déterminé. $\Pi_v(\zeta_1 \zeta_2)$ deviennent alors des formes uniformes inramifiées, qui, lorsque ζ_1 et ζ_2 subissent les substitutions:

$$\zeta_1' = \alpha \zeta_1 + \beta \zeta_2; \quad \zeta_2' = \gamma \zeta_1 + \delta \zeta_2;$$

subissent les substitutions:

$$\Pi_v(\alpha \zeta_1 + \beta \zeta_2; \gamma \zeta_1 + \delta \zeta_2) = \tau^{-d} T(\Pi_v(\zeta_1 \zeta_2))$$

A un sommet elliptique d'ordre l_i correspond le multiplicateur $\tau^{-d} = e^{-d \frac{\pi i}{l_i}}$; à un sommet parabolique, $\tau^{-d} = 1$; à une substitution A_H , $\tau^{-d} = 1$; à une substitution, B_H

$$\tau^{-d} = e^{\pi i d} \left[\sum_h (H_h - 1) W_q^{v_h} + \sum_k \left(1 - \frac{1}{l_k} \right) W_q^{l_k} \right]^*$$

§ 4. De (5) on peut conclure que v est toujours négatif sauf dans les exceptions suivantes:

- 1) $p = 0$; $s = 2$ groupe cyclique.
- 2) $p = 0$; $s = 3$; $\sum \frac{1}{l_i} > 1$ groupe elliptique de rotation.
- 3) $p = 0$; $s = 3$; $\sum \frac{1}{l_i} = 1$ groupe parabolique de rotation.
- 4) $p = 1$; $s = 0$ groupe cyclique ou groupe avec deux points limites.

Nous laissons ces cas de côté dans ce qui suit et nous admettons donc $v < 0$. Nous avons

$$\delta = \frac{d}{v} \quad \text{et} \quad \bar{\delta} = \frac{\bar{d}}{v}$$

ou si nous substituons v

$$\delta = d \left[-p + 1 - \frac{1}{2} \sum \left(1 - \frac{1}{l_i} \right) \right]; \quad \bar{\delta} = \bar{d} \left[-p + 1 - \frac{1}{2} \sum \left(1 - \frac{1}{l_i} \right) \right]$$

mais

$$\delta + \bar{\delta} = 2p - 2 + \sum v_i$$

d'où

$$d + \bar{d} = \frac{2p - 2 + \sum v_i}{-p + 1 - \frac{1}{2} \sum \left(1 - \frac{1}{l_i} \right)}.$$

* Fricke-Klein: Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, II, p. 231.

Nous choisissons alors

$$\sum p_i = \sum \left(1 - \frac{1}{l_i}\right) \quad p_i = 1 - \frac{1}{l_i}$$

et nous trouvons

$$(6) \quad d + \bar{d} = -2$$

Dans ce qui suit nous admettons $d < -2$ d'où $\bar{d} > 0$.

§ 5. Le nombre de formes entières linéairement indépendantes d'un système de formes donné est selon Ritter

$$(7) \quad \tau = n(\delta - p + 1) - \sum_{i=1}^s (\lambda)_i + \bar{\tau}$$

où $\bar{\tau}$ est le nombre de formes entières linéairement indépendantes du système de formes réciproques; on désigne par $(\lambda)_i$ le système d'exposant modifié, introduit par Ritter.

Le nombre de formes linéairement indépendantes d'un système de formes donné avec s_1 points mobiles d'infinité est

$$(8) \quad \sigma = n(\delta + s_1 - p + 1) - \sum (\lambda)_i + \bar{\sigma}_1$$

où $\bar{\sigma}_1$ est le nombre de formes entières linéairement indépendantes du système de formes réciproques qui disparaissent dans tous les points permis d'infinité.

Nous avons

$$\delta = d \left[1 - p - \frac{1}{2} \sum \left(1 - \frac{1}{l_i} \right) \right] = \frac{d}{2}$$

Comme

$$v < 0; \quad d < -2; \quad \text{on a}$$

$$\delta > -2 \left[1 - p - \frac{1}{2} \sum \left(1 - \frac{1}{l_i} \right) \right] = 2p - 2 + \sum \left(1 - \frac{1}{l_i} \right)$$

mais

$$\delta + \bar{\delta} = 2p - 2 + \sum \left(1 - \frac{1}{l_i} \right)$$

D'où il suit que $\bar{\delta} < 0$.

Il n'y a donc pas de formes entières dans le système réciproque et par conséquent $\bar{\tau} = 0$; $\bar{\sigma}_1 = 0$.

Les relations (7) et (8) deviennent alors

$$(7_1) \quad \tau = n(\delta - p + 1) - \sum (\lambda)_i$$

$$(8_1) \quad \sigma = n(\delta + s_1 - p + 1) - \sum (\lambda)_i$$

§ 6. Soit $\bar{\sigma}$ le nombre de formes linéairement indépendantes du système de formes réciproques, qui a des pôles mobiles en $\bar{s}_1$ points.

On a alors

$$(9) \quad \bar{\sigma} = n(\bar{\delta} + \bar{s}_1 - p + 1) - \sum (\bar{\lambda})_i + \rho$$

où ρ est le nombre de formes entières indépendantes qui disparaissent dans les $\bar{s}_1$ points d'infinité.

Nous admettons maintenant tout d'abord

$$n\bar{s}_1 > n(\bar{\delta} - p + 1) - \sum (\lambda)_i$$

L'on a, eu égard à (7₁) $\rho = 0$ et par conséquent la relation

$$(9_1) \quad \bar{\sigma} = n(\bar{\delta} + \bar{s}_1 - p + 1) - \sum (\bar{\lambda})_i$$

Si par contre

$$n\bar{s}_1 \leq n(\bar{\delta} - p + 1) - \sum (\lambda)_i$$

on a alors

$$\rho = n(\bar{\delta} - p - s_1 + 1) - \sum (\lambda)_i$$

A cause des relations

$$\bar{\delta} + \delta = 2p - 2 + \sum \left(1 - \frac{1}{l_i}\right)$$

et

$$\sum (\lambda)_i + \sum (\bar{\lambda})_i = n \sum \left(1 - \frac{1}{l_i}\right)$$

on a

$$\bar{\sigma} = 0.$$

Il y a par conséquent des formes du système réciproque de dimension $\bar{d} > 0$, qui ont des pôles en $\bar{s}_1$ points mobiles si seulement

$$(10) \quad n\bar{s} > n(\delta - p + 1) - \sum (\lambda)_i$$

CHAPITRE II.

§ 7. Soit une substitution T_i du groupe G représentée par

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} & \dots & a_{1n}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} & a_{22}^{(i)} & \dots & a_{2n}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^{(i)} & a_{n2}^{(i)} & \dots & a_{nn}^{(i)} \end{vmatrix}$$

et par conséquent la substitution T_i^{-1} représentée par

$$\begin{vmatrix} A_{11}^{(i)} & A_{12}^{(i)} & \dots & A_{1n}^{(i)} \\ A_{21}^{(i)} & A_{22}^{(i)} & \dots & A_{2n}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}^{(i)} & A_{n2}^{(i)} & \dots & A_{nn}^{(i)} \end{vmatrix}$$

où $A_{\mu\nu}^{(i)}$ est le sous-déterminant de $a_{\nu\mu}^{(i)}$ divisé par le déterminant.

Nous admettons dans ce qui suit que le déterminant a pour valeur absolue 1. Si T_i est une substitution S_i , cela est toujours le cas, si λ_i est un nombre réel. Nous supposons donc que λ_{iv} est un nombre réel. Si T_i est une substitution A_H ou B_H , on peut trouver une substitution dont le déterminant a pour valeur absolue 1 en multipliant toutes les formes par une fonction exponentielle d'une intégrale de première espèce. Nous trouvons maintenant une expression analytique pour les formes $\Pi_\nu(\zeta_1, \zeta_2)$ dans les séries Z de Poincaré

$$(11) \quad Z_\mu(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_i \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \mu_{i\nu}^{-1} A_{\mu\nu}^{(i)} H_\nu(\zeta_1^{(i)}, \zeta_2^{(i)});$$

où

$$\zeta_1^{(i)} = \alpha_i \zeta_1 + \beta_i \zeta_2; \quad \zeta_2^{(i)} = \gamma_i \zeta_1 + \delta_i \zeta_2$$

$H_1(\zeta_1, \zeta_2) \dots H_n(\zeta_1, \zeta_2)$ sont n formes rationnelles du degré d . Faisons subir à ζ_1 et ζ_2

la substitution $s_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix}$ du groupe fuchsien g isomorphe avec G , nous obtenons :

$$Z_\nu(\zeta_1^{(k)} \zeta_2^{(k)}) = \mu_k (a_{\nu 1}^{(k)} Z_1(\zeta_1 \zeta_2) + a_{\nu 2}^{(k)} Z_2(\zeta_1 \zeta_2) + \dots + a_{\nu n}^{(k)} Z_n(\zeta_1 \zeta_2)).$$

Écrites sous une forme homogène les séries (11) prennent la forme suivante :

$$Z_\mu(\zeta) = \sum_i \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \mu_i^{-1} A_{\mu\nu}^{(i)} \cdot H_\nu(\zeta^{(i)}) \frac{1}{(\gamma_i \zeta + \delta_i)^{-i}}$$

Poincaré a montré la convergence absolue de ces séries, à condition que $-d$ soit suffisamment grand. Il a supposé pour cela que le cercle fondamental était le cercle limite. Voyons comment nous devons modifier sa démonstration pour qu'elle s'applique au cas sans cercle limite.

Soit

$$\sum_i \sum_{\nu=1}^{\nu=n} H_\nu(\zeta^{(i)}) \frac{A_{\mu\nu}^{(i)}}{(\gamma_i \zeta + \delta_i)^{2m}}$$

une série zétafuchsienne dont nous devons démontrer la convergence. Il est suffisant de montrer la convergence de la série

$$\sum_i \frac{|A_{\mu\nu}^{(i)}|}{|\gamma_i \zeta + \delta_i|^{2m}}.$$

Admettons que ζ soit situé dans le polygone fondamental R_0 . Soit $C_1 C_2 \dots C_{2n}$ les côtés de ce polygone. Soit R_j un polygone adjacent à R_0 le long du côté C_j . Admettons que la substitution s_j du groupe g soit la substitution qui transforme R_0 en R_j et S_j la substitution correspondante du groupe G . Soit $S_1 S_2 \dots S_{2n}$ les substitutions fondamentales du groupe G .

Traçons maintenant un arc allant de ζ à ζ_{s_i} perpendiculaire au cercle fondamental. Nous rencontrons alors des côtés homologues à $C_{a_1} C_{a_2} \dots C_{a_n}$.

Nous pouvons alors écrire

$$S_i = S_{a_n} S_{a_{n-1}} \dots S_{a_2} S_{a_1}.$$

Modifions cette expression de manière que si

$$S_{a_k} S_{a_{k-1}} \dots S_{a_i} = T$$

soit une substitution critique et si cette combinaison se produit dans l'expression de S_i nous introduisons T à la place.

Nous avons donc

$$S_i = S_{\lambda_n}^{t_m} S_{\lambda_{m-1}}^{t_{m-1}} \dots S_{\lambda_1}^{t_1}$$

où S_{λ_j} est une substitution fondamentale ou une substitution critique.

Des substitutions fondamentales qui ne sont pas paraboliques quelques unes peuvent être elliptiques, d'autres hyperboliques.

Soit M le plus grand module des coefficients des substitutions fondamentales ou critiques.

Comme dans le cas du cercle limite nous avons

$$|A_{\mu\nu}^{(i)}| < (nM)^{\Sigma\gamma} + 3q + \Sigma\varepsilon n \Sigma \log \beta.$$

$\Sigma\gamma$ est la somme des exposants des substitutions elliptiques, β est l'exposant d'une substitution critique et $\Sigma\varepsilon$ est la somme des exposants des substitutions hyperboliques. q a la même importance que dans la démonstration de Poincaré pour le cas du cercle limite.

De la même manière que dans le cas du cercle limite on a

$$\Sigma\gamma < Rk_1; \quad \Sigma \log \beta < Rk_2; \quad 3q < Rk_3.$$

Cherchons maintenant l'expression majorée de $\Sigma\varepsilon$. $\Sigma\varepsilon$ est le nombre d'intersections des côtés qui se changent l'un en l'autre par des substitutions hyperboliques.

Soit Σ_m une substitution hyperbolique parmi les substitutions fondamentales.

La distance non euclidienne entre deux points, situés sur des côtés qui se changent l'un en l'autre par Σ_m , est toujours plus grande qu'un certain nombre ν_m . Le nombre d'intersections entre ces côtés et l'arc $z - z_{S_i}$ est alors inférieur à $\frac{R}{\nu_m}$.

Si $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_l$ sont les substitutions fondamentales hyperboliques, on a

$$\Sigma\varepsilon < R \sum_{m=1}^l \frac{1}{\nu_m} = Rk_4.$$

Par suite il est démontrée que

$$|A_{\mu\nu}^i| < e^{Rk}$$

et par suite que la série est absolument convergente.

§ 8. Comme pour les séries thétafuchsienues il se produit ici une difficulté, à savoir que les séries disparaissent identiquement. Si la fonction qui est définie par la série a un pôle, cela est cependant impossible. Examinons d'abord les séries à un pôle.

Admettons d'abord que le cercle fondamental est le cercle limite. Soit $G_\nu(\zeta_1, \zeta_2)$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) n formes rationnelles entières du degré $d - 1$ et dont tous les zéros se trouvent en dehors du cercle limite. Admettons que ξ soit un point au dedans du cercle limite.

$$(13) \quad Z_{\mu\nu}(\zeta_1 \zeta_2; \xi_1 \xi_2) = \sum_i \mu_i^{-1} A_{\mu\nu}^{(i)} \frac{1}{(\zeta^{(i)} \xi) G_\nu(\zeta_1^{(i)} \zeta_2^{(i)})}$$

$$(\mu = 1_1 2 \dots n)$$

sont donc des formes, qui appartiennent à notre classe. En $\zeta = \xi$, $Z_{\nu\nu}$ a un pôle du premier ordre, $Z_{\mu\nu}(\mu \neq \nu)$ sont par contre finis. Dans les points $\xi^{(i)}$ tous les $Z_{\mu\nu}$ ont un pôle.

Considérons ensuite le cas où le cercle fondamental n'est pas le cercle limite mais où le réseau des polygones couvre tout le plan.

Choisissons un point η qui ne se confond pas avec ξ et qui ne tombe pas non plus dans un sommet de polygone ou dans un point limite. Choisissons ensuite $-d-1+n-1$ substitutions s_i qui jusqu'à nouvel ordre sont arbitraires; désignons par $\eta^{(i)}$ les points équivalents correspondant à η .

Formons maintenant

$$G_\nu(\zeta_1 \zeta_2) = a_1^{(\nu)} \zeta_1^n + a_2^{(\nu)} \zeta_1^{n-1} \zeta_2 + \dots + a_{n+1}^{(\nu)} \zeta_2^n.$$

Formons ensuite les séries

$$(14) \quad Z_{\mu\nu}(\zeta_1 \zeta_2; \xi_1 \xi_2) = \sum_i A_{\mu\nu}^{(i)} \mu_i^{-1} \frac{G_\nu(\zeta_1^{(i)} \zeta_2^{(i)})}{(\zeta^{(i)} \xi) (\zeta^{(i)} \eta) (\zeta^{(i)} \eta^{(1)}) \dots (\zeta^{(i)} \eta^{(-d-2+n)})}$$

$$(\mu = 1_1 2 \dots n).$$

Nous voulons maintenant déterminer $G_\nu(\zeta_1 \zeta_2)$ de telle manière que toutes les séries deviennent finies en η et les points équivalents avec η , et que par contre elles aient un pôle en ξ et des points équivalents avec ξ .

Dans le point η le coefficient de $-\frac{1}{(\zeta\eta)}$ en $Z_{\mu\nu}(\zeta_1 \zeta_2; \xi_1 \xi_2)$ a l'aspect suivant:

$$B_{\mu\nu} = \sum_{k=0}^{k=-d-2+n} \mu_k^{-1} A_{\mu\nu}^{(k)} \frac{G_\nu(\eta_1^{(k)} \eta_2^{(k)})}{(\eta^{(k)} \eta) (\eta^{(k)} \eta^{(1)}) \dots (\eta^{(k)} \eta^{(k-1)}) (\eta^{(k)} \eta^{(k+1)}) \dots (\eta^{(k)} \eta^{(-d-2+n)})} \cdot \frac{1}{(\xi \eta^{(k)})}$$

Le coefficient de $\frac{1}{(\zeta\xi)}$ dans le développement de $Z_{\mu\nu}(\zeta_1 \zeta_2; \xi_1 \xi_2)$ devient

$$C'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}^{(0)} \frac{G_\nu(\xi_1 \xi_2)}{(\xi \eta) (\xi \eta^{(1)}) \dots (\xi \eta^{(-d-2+n)})}$$

On a donc

$$\frac{B_{\mu\nu}}{C_{\nu\nu}} = R_{\mu\nu}(\eta) = A_{\mu\nu}^{(k)} \mu_k^{-1} (\gamma_k \eta + \delta_k)^{d+2}$$

$$(k = 0, 1, \dots, d-2+n).$$

Supposons maintenant que, parmi les s_i que nous avons choisis, l'un au moins n'ait pas $\gamma_k = 0$.

$$\text{Lorsque } k=0, \text{ on a } R_{\mu\nu}(\eta) = 0 \quad \mu \neq \nu$$

$$R_{\nu\nu}(\eta) = 1.$$

Si l'on choisit ensuite $\xi = \eta^{(k)}$ $k \neq 0$, on trouve

$$d = -2 \quad A^{(k)} = 0 \quad (\mu \neq \nu) \text{ et } A_{\nu\nu}^{(k)} \mu_k^{-1} = 1$$

ce qui est en contradiction avec les hypothèses.

Le déterminant D_ν ne peut donc disparaître.

Nous avons donc construit des séries à un pôle même dans le cas où le réseau des polygones s'étend sur tout le plan.

Nous avons admis pour cela que ξ n'est pas situé dans un sommet elliptique. Nous pouvons maintenant laisser de côté cette condition. Admettons maintenant que $\xi = \varepsilon$, où ε est un sommet elliptique.

Considérons d'abord le cas où le réseau des polygones a un cercle limite. (13) peut alors s'écrire

$$(13_1) \quad Z_{\mu\nu} = \sum_i A_{\mu\nu}^{(i)} \mu_i^{-1} \frac{1}{(\zeta^{(i)} \varepsilon) G_\nu [(\zeta^{(i)} \varepsilon) (\zeta^{(i)} \varepsilon')]}$$

où ε' est le second sommet, correspondant à la même substitution.

A proximité de ε , $Z_{\mu\nu}$ a l'aspect suivant.

$$\frac{K_{\mu\nu}(\zeta \varepsilon')^{d+1}}{(\zeta \varepsilon)} \sum_{s=0}^{s=l_k-1} A_{\mu\nu}^{(s)} \mu_k^{-s} e^{\left(-\frac{\pi i}{l_k}(d+1) - \frac{\pi i}{l_k}\right)s} = B_{\mu\nu} \frac{K_{\mu\nu}(\zeta \varepsilon')^{d+1}}{(\zeta \varepsilon)}$$

où $K_{\mu\nu}$ est une constante.

Mais

$$A_{\mu\nu}^{(s)} = \omega_1^s C'_{\mu\nu} + \omega_2^s C''_{\mu\nu} + \dots + \omega_n^s C_{\mu\nu}^{(s)} \quad (s = 0, 1, 2, \dots, l_k - 1)$$

où

$$\omega_1 = e^{-2\pi i \lambda_{1k}} \dots \omega_n = e^{-2\pi i \lambda_{nk}}.$$

D'où

$$B_{\mu\nu} = C'_{\mu\nu} \sum_{s=0}^{s=l_k-1} e^{-2\pi i s \left(\frac{1}{l_k} + \lambda_{1k}\right)} + \dots + C_{\mu\nu}^{(n)} \sum_{s=0}^{s=l_k-1} e^{-2\pi i s \left(\frac{1}{l_k} + \lambda_{nk}\right)}$$

On a alors $B_{\mu\nu} = 0$ pourvu que l'on n'ait pas

$$(16) \quad \frac{1}{l_k} + \lambda_{hk} \equiv 0 \pmod{1}.$$

Mais en ε il se rencontre l_k polygones. Nous disons pour cela que la série a un pôle d'ordre $\frac{1}{l_k}$ dans chacun des polygones, si la congruence ci-dessus se produit.

Mais

$$(17) \quad Z^\mu(\zeta_1 \zeta_2) = (\zeta \varepsilon')^d \left[\sum_{p \equiv \lambda_{1k} l_k \pmod{l_k}} A_p^{(\mu)} \frac{(\zeta \varepsilon)^p}{(\zeta \varepsilon')^p} + \dots + \sum_{p \equiv \lambda_{nk} l_k \pmod{l_k}} A_p^{(\mu)} \frac{(\zeta \varepsilon)^p}{(\zeta \varepsilon')^p} \right].$$

Par conséquent si p n'est pas négatif chacune de ces sommes a un zéro en ε d'ordre λ_{hk} , si nous admettons $0 \leq \lambda_{hk} < 1$.

Si maintenant il y a la congruence (16), on a

$$\lambda_{hk} = \frac{l_k - 1}{l_k}$$

et alors apparaît un zéro d'ordre $\frac{l_k - 1}{l_k}$.

Si la série a une infinie d'ordre $\frac{1}{l_k}$, nous disons que nous avons construit une série à un pôle.

Admettons maintenant qu'aucune de ces congruences n'existe. Nous pouvons alors poser $\frac{m}{l_k} = \lambda_{hk}$.

Formons maintenant les séries

$$(18) \quad \sum_i A_{\mu\nu}^{(i)} \mu_i^{-1} \frac{1}{(\zeta^{(i)} \varepsilon)^{l_k - m} G^{(-d+m-l_k)} (\zeta_1^{(i)} \zeta^{(i)})}.$$

A proximité de ε , nous avons alors un terme dominant

$$\frac{K_{\mu\nu} (\zeta \varepsilon')^{d-m+l_k}}{(\zeta \varepsilon)^{l_k-m}} \left[C_{\mu\nu}^{(1)} \sum_{s=0}^{s=l_k-1} e^{-2\pi i s \left(\frac{l_k-m}{l_k} + \lambda_{1k} \right)} + \dots + C_{\mu\nu}^{(n)} \sum_{s=0}^{s=l_k-1} e^{-2\pi i s \left(\frac{l_k-m}{l_k} + \lambda_{nk} \right)} \right].$$

Par suite de la congruence $l_k - m + \lambda_{hk} l_k \equiv 0 \pmod{l_k}$ ce terme ne peut être zéro et la série a une infinité d'ordre $\frac{l_k - m}{l_k}$. Mais la série (17) a en general un zéro d'ordre $\frac{m}{l_k}$ en ε . Nous avons ainsi même de cette manière construit des séries à un pôle.

Les mêmes observations peuvent être faites avec de faibles modifications lorsque le réseau des polygones s'étend sur tout le plan.

§ 9. Reprenons l'étude des séries (13) et (14) mais avec quelques modifications.

Dans le cas du cercle limite nous posons

$$(19) \quad \Lambda_{\mu\nu}(\zeta_1 \zeta_2; \xi_1 \xi_2) = \sum_i A_{\mu\nu}^{(i)} \mu_i^{-1} \frac{G_\nu(\xi_1 \xi_2)}{(\zeta^{(i)} \xi) G_\nu(\zeta_1^{(i)} \zeta_2^{(i)})}$$

on trouve alors

$$\begin{aligned} \lim_{\xi = \xi} (\zeta \xi) \Lambda_{\mu\nu}(\zeta_1 \zeta_2; \xi_1 \xi_2) &= 1 & \mu = \nu \\ &= 0 & \mu \neq \nu \\ \lim_{\substack{\zeta^{(k)} \rightarrow \xi \\ \zeta_1^{(k)} \rightarrow \xi_1 \\ \zeta_2^{(k)} \rightarrow \xi_2}} (\zeta^{(k)} \xi) \Lambda_{\mu\nu}(\zeta_1 \zeta_2; \xi_1 \xi_2) &= A_{\mu\nu}^{(k)} \mu_k^{-1}. \end{aligned}$$

Dans les groupes sans cercle limite choisissons les constantes $a_i^{(\nu)}$ de la manière suivante:

$$a_i^{(\nu)} = (-1)^{i-1} D_{n-1, \nu}^{(i)} (\xi \eta) (\xi \eta^{(1)}) \dots (\xi \eta^{(-i-2+n)}).$$

$G_\nu(\zeta_1 \zeta_2; \xi_1 \xi_2)$ devient par suite du degré $-d-1$ des variables ξ_1 et ξ_2 et

$$\frac{G_\nu(\xi_1 \xi_2; \xi_1 \xi_2)}{\prod_{k=0}^{d-2+n} (\xi \eta^{(k)})}$$

indépendante de ξ_1 et ξ_2 , car

$$\begin{aligned} \frac{G_\nu(\xi_1 \xi_2; \xi_1 \xi_2)}{\prod_{k=0}^{d-2+n} (\xi \eta^{(k)})} &= \frac{a^{(\nu)} \xi_2^n + a_2^{(\nu)} \xi_1^{n-1} \xi_2 + \dots + a_{n+1}^{(\nu)} \xi_2^\nu}{\prod (\xi \eta^{(k)})} \\ &= D_{n+1, \nu}^{(1)} \xi_1^n - D_{n+1, \nu}^{(2)} \xi_1^{n-1} \xi_2 + \dots + (-1)^n D_{n+1, \nu}^{(n+1)} \xi_2^n. \end{aligned}$$

Cette dernière expression peut cependant s'écrire:

$$\left[\begin{array}{l} \xi_1 \Phi'_{1\nu} - \xi_2 \Phi'_{1\nu}; \xi_1 \Phi'''_{1\nu} - \xi_2 \Phi''_{1\nu}; \dots; \xi_1 \Phi^{(n+1)}_{1\nu} - \xi_2 \Phi^{(n)}_{1\nu} \\ \xi_1 \Phi''_{2\nu} - \xi_2 \Phi'_{2\nu}; \xi_1 \Phi'''_{2\nu} - \xi_2 \Phi''_{2\nu}; \dots; \xi_1 \Phi^{(n+1)}_{2\nu} - \xi_2 \Phi^{(n)}_{1\nu} \\ \dots \\ \xi_1 \Phi''_{n\nu} - \xi_2 \Phi'_{n\nu}; \xi_1 \Phi'''_{n\nu} - \xi_2 \Phi''_{n\nu}; \dots; \xi_1 \Phi^{(n+1)}_{n\nu} - \xi_2 \Phi^{(n)}_{n\nu} \end{array} \right]$$

Cette expression est indépendante de ξ .

Posons

$$\frac{G_\nu(\xi_1 \xi_2; \xi_1 \xi_2)}{\prod_{k=2}^{k=-d-2+n} (\xi \eta^{(k)})} = R_\nu(\eta_{l_1} \eta_{l_2})$$

et formons les séries

$$(20) \quad \Lambda_{\mu\nu}(\zeta_1 \zeta_2; \xi_1 \xi_2) = \sum_i A_{\mu\nu}^{(i)} \mu_i^{-1} \frac{G_\nu(\zeta_1^{(i)} \zeta_2^{(i)}; \xi_1 \xi_2)}{(\zeta \xi) (\zeta^{(i)} \eta) (\zeta^{(i)} \eta^{(1)}) \dots (\zeta^{(i)} \eta^{(-d-2+n)})} \frac{1}{R_\nu(\eta_{l_1} \eta_{l_2})}.$$

Faisons maintenant varier ξ_1 et ξ_2 . Si dans ce cas ξ_1 et ξ_2 tombent en un sommet elliptique, le pôle disparaît et une disparition identique est possible, si aucune des congruences $1 + \lambda_{hk} l_k \equiv 0 \pmod{l_k}$ ne s'applique là où le pôle est maintenu.

Recherchons maintenant comment les séries (20) se comportent lorsque ξ tombe en l'un des points $\eta, \eta^{(1)}, \dots, \eta^{(-d-2+n)}$ soit $\eta^{(j)}$.

$$G_\nu(\zeta_1 \zeta_2; \xi_1 \xi_2) = \prod_{i=0}^{i=-d-2+n} (\xi \eta^{(i)}) \begin{vmatrix} \zeta_1 \Phi'_{1\nu} - \zeta_2 \Phi'_{1\nu}; \dots; \zeta_1 \Phi'_{1\nu}^{(n+1)} - \zeta_2 \Phi'_{1\nu}^{(n)} \\ \dots \\ \zeta_1 \Phi'_{n\nu} - \zeta_2 \Phi'_{n\nu}; \dots; \zeta_1 \Phi'_{n\nu}^{(n+1)} - \zeta_2 \Phi'_{n\nu}^{(n)} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{i=0}^{i=-d-2+n} (\xi \eta^{(i)}) \cdot D_1.$$

Mais

$$\zeta_1 \Phi'_{\mu\nu}^{(i+1)} - \zeta_2 \Phi'_{\mu\nu}^{(i)} = \sum_{k=0}^{k=-d-2+n} \frac{A_{\mu\nu}^{(k)} \mu_k^{-1} (\eta_{l_1}^{(k)})^{n-i} (\eta_{l_2}^{(k)})^{i-1} (\zeta \eta^{(k)})}{(\eta^{(k)} \eta) \dots (\eta^{(k)} \eta^{(k-1)}) (\eta^{(k)} \eta^{(k+1)}) \dots (\eta^{(k)} \eta^{(-d-2+n)})} \cdot \frac{1}{(\xi \eta^{(k)})} =$$

$$= K_{\mu\nu}^{i,1} + K_{\mu\nu}^{i,2} \frac{1}{(\xi \eta^{(j)})}.$$

D_1 peut alors s'écrire comme un polynôme de $\frac{1}{(\xi \eta^{(j)})}$ du degré n . Mais on trouve facilement que les déterminants qui forment les coefficients de $\frac{1}{(\xi \eta^{(j)})^m}$ pour $m > 1$ sont zéro. Le coefficient de $\frac{1}{(\xi \eta^{(j)})}$ comprend évidemment le facteur $(\zeta \eta^{(j)})$. Soit $(\zeta \eta^{(j)}) Q(\zeta_1 \zeta_2)$.

Si l'on fait alors $\xi = \eta^{(j)}$, on trouve

$$G_{\nu}(\zeta_1 \zeta_2; \eta_1^{(j)} \eta_2^{(j)}) = (\eta^{(j)} \eta) \dots (\eta^{(j)} \eta^{(j-1)}) (\eta^{(j)} \eta^{(j+1)}) \dots (\eta^{(j)} \eta^{(-d-2+n)}) (\zeta \eta^{(j)}) Q(\zeta_1 \zeta_2)$$

D'ailleurs on a $Q(\eta_1^{(j)} \eta_2^{(j)}) = R_{\nu}(\eta_1 \eta_2)$.

Les séries (20) deviennent donc

$$(20_1) \sum_i A_{\mu\nu}^{(i)} \mu_i^{-1} \frac{(\eta_1^{(j)} \eta) \dots (\eta_1^{(j)} \eta^{(j-1)}) (\eta_1^{(j)} \eta^{(j+1)}) \dots (\eta_1^{(j)} \eta^{(-d-2+n)}) Q(\zeta_1^{(i)} \zeta_2^{(i)})}{(\zeta^{(i)} \eta) \dots (\zeta^{(i)} \eta^{(j-1)}) (\zeta^{(i)} \eta^{(j+1)}) \dots (\zeta^{(i)} \eta^{(-d-2+n)}) R_{\nu}(\eta_1 \eta_2)} \cdot \frac{1}{(\zeta^{(i)} \eta^{(j)})}$$

La série conserve ainsi son pôle en $\xi = \eta^{(j)}$ avec pour résidu 1.

Faisons ensuite ξ tomber en un point $\eta^{(l)}$ où $(l \neq 0, 1 \dots -d-2+n)$. Le coefficient de $(\zeta \eta)^{-1}$ devient donc

$$A_{\mu\nu}^{(l)} \mu_l^{-1} \frac{G_{\nu}(\eta_1^{(l)} \eta_2^{(l)}; \eta_1^{(l)} \eta_2^{(l)})}{(\eta^{(l)} \eta) \dots (\eta^{(l)} \eta^{(-d-2+n)})} \cdot \frac{1}{R_{\nu}(\eta_1 \eta_2)} + \\ + \sum_{k=0}^{k=-d-2+n} A_{\mu\nu}^{(k)} \mu_k^{-1} \frac{G_{\nu}(\eta_1^{(k)} \eta_2^{(k)}; \eta_1^{(l)} \eta_2^{(l)})}{(\eta^{(k)} \eta) (\eta^{(k)} \eta) \dots (\eta^{(k)} \eta^{(k-1)}) (\eta^{(k)} \eta^{(k+1)}) \dots (\eta^{(k)} \eta^{(-d-2+n)})} \cdot \frac{1}{R_{\nu}(\eta_1 \eta_2)}$$

La dernière somme est cependant égale à $B_{\mu\nu}$ multipliée par une constante, lorsqu'on pose $\xi = \eta^{(l)}$. Cette somme disparaît donc identiquement.

Le coefficient devient donc

$$A_{\mu\nu}^{(l)} \mu_l^{-1} \frac{G_{\nu}(\eta_1^{(l)} \eta_2^{(l)}; \eta_1^{(l)} \eta_2^{(l)})}{(\eta^{(l)} \eta) \dots (\eta^{(l)} \eta^{(-d-2+n)})} \cdot \frac{1}{R_{\nu}(\eta_1 \eta_2)} = A_{\mu\nu}^{(l)} \mu_l^{-1}$$

En $\zeta = \eta$, $\Lambda_{\mu\nu}(\zeta_1 \zeta_2; \xi_1 \xi_2)$ a donc un pôle avec pour résidu $A_{\mu\nu}^{(l)} \mu_l^{-1}$. En $\eta^{(l)}$ le résidu est

$$\text{pour } \mu = \nu: 1 \qquad \text{pour } \mu \neq \nu: 0$$

Si nous rendons ζ_1 et ζ_2 fixes et si nous admettons qu'ils ne tombent pas au sommet d'un polygone non plus qu'en un point $\eta^{(i)}$, les formes $\Lambda_{\mu\nu}$ sont des formes analytiques de ζ_1 et ζ_2 qui ont des pôles en $\xi = \zeta$ ou des points équivalents $\Lambda_{\mu\nu}$ sont du degré $\bar{d} = -d-2$ par rapport à ξ_1 et ξ_2 .

Admettons maintenant que ζ tombe à un sommet elliptique et admettons en outre qu'aucune des congruences $\lambda_{hk} l_k \equiv 0 \pmod{l_k}$ ($h = 1, 2 \dots n$) n'ait lieu. Dans ce cas $\Lambda_{\mu\nu} a$, en tant que forme de ζ_1 et ζ_2 , indépendante de ζ_1 et ζ_2 un zéro. Considérée en tant que forme de ξ_1 et ξ_2 elle disparaît alors identiquement.

Considérons ensuite le cas où l'une des congruences $\lambda_{hk} l_k \equiv 0 \pmod{l_k}$ se produit.

Dans le développement de $\Delta_{\mu\nu}$ on obtient, si l'on tient compte de la relation :

$$(\varepsilon\varepsilon')(\zeta\xi) = (\zeta\varepsilon)(\xi\varepsilon') - (\zeta\varepsilon')(\xi\varepsilon)$$

le coefficient suivant pour $\frac{1}{(\xi\varepsilon)}$

$$K_{\mu\nu} \left[C'_{\mu\nu} \sum_k e^{-2\pi i \lambda_{1k}} + \dots + C_{\mu\nu}^{(n)} \sum_k e^{-2\pi i \lambda_{nk}} \right]$$

Le pôle en ε est alors conservé.

Si ζ tombe en η ou en des points équivalents, $\Delta_{\mu\nu}$ n'a plus de pôles sauf peut-être en η ou aux points équivalents.

Faisons ζ tomber en η et rapprochons ξ de $\eta^{(l)}$. Admettons d'abord $l \neq 0, 1, 2, \dots, d+n-2$. On trouve alors immédiatement que $\xi = \eta$ est un pôle de premier ordre avec pour résidu $-A_{\mu\nu}^{(l)} \mu_l^{-1}$.

Admettons ensuite que $l = 0, 1, 2, \dots, d-2+n$. La série

$$\sum_{k=0}^{d-2+n} A_{\mu\nu}^{(k)} \mu_k^{-1} \frac{G_\nu(\zeta_1^{(k)} \zeta_2^{(k)}; \xi_1 \xi_2)}{(\zeta^{(k)} \xi) (\zeta^{(k)} \eta) \dots (\zeta^{(k)} \eta^{(-d-2+n)})} \cdot \frac{1}{R_\nu(\eta_1 \eta_2)}$$

contient alors tous les termes, qui sont infinis, lorsque ζ tombe en η et ξ en $\eta^{(l)}$. Si nous développons cette série en puissances de $(\zeta\eta)$ le coefficient de $\frac{1}{(\zeta\eta)}$ devient 0. Le terme qui ne contient pas $(\zeta\eta)$ devient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_\nu(\eta_1 \eta_2)} \left[\sum_{k=0}^{d-2+n} A_{\mu\nu}^{(k)} \mu_k^{-1} \frac{G_\nu(\xi_1 \xi_2; \xi_1 \xi_2)}{(\xi\eta) \dots (\xi\eta^{(-d-2+n)})} \cdot \frac{1}{(\eta^{(k)} \xi)} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^{d-2+n} \sum_{i=0}^{d-2+n} \frac{G_\nu(\eta_1^{(i)} \eta_2^{(i)}; \xi_1 \xi_2)}{(\eta^{(i)} \xi) (\eta^{(i)} \eta) \dots (\eta^{(i)} \eta^{(i-1)}) (\eta^{(i)} \eta^{(i+1)}) \dots (\eta^{(i)} \eta^{(-d-2+n)}) (\eta^{(k)} \eta^{(s)})} \right] \end{aligned}$$

montre que $k=i$ ne peut-être admis.

Lorsque ξ s'approche de $\eta^{(l)}$ il devient, puisque

$$\frac{G_\nu(\xi_1 \xi_2; \xi_1 \xi_2)}{(\eta^{(k)} \xi)} \quad \text{et que} \quad \frac{G_\nu(\eta_1^{(i)} \eta_2^{(i)}; \xi_1 \xi_2)}{(\eta^{(i)} \xi)}$$

sont finis, le seul terme d'infinité :

$$- \frac{1}{(\xi\eta^{(l)})} \frac{A_{\mu\nu}^{(l)} \mu_l^{-1} G_\nu(\xi_1 \xi_2; \xi_1 \xi_2)}{(\xi\eta) \dots (\xi\eta^{(-d-2+n)})} \cdot \frac{1}{R_\nu(\eta_1 \eta_2)} = - \frac{1}{(\xi\eta^{(l)})} A_{\mu\nu}^{(l)} \mu_l^{-1}$$

Aussi on obtient pour $\xi = \eta^{(l)}$ un pôle de premier ordre avec pour résidu $-A_{\mu\nu}^{(l)} \mu_l^{-1}$.

§ 10. Les formes $\Lambda_{\mu\nu}(\zeta_1 \zeta_2; \xi_1 \xi_2)$, considérées comme formes de ζ_1 et ζ_2 ont cette propriété, si elles ne disparaissent pas identiquement, d'avoir un pôle dans chaque polygone du réseau. Ces pôles sont ζ et les points équivalents avec pour résidu $-A_{\mu\nu}^{(l)} \mu_l^{-1}$. Ils sont du degré $\bar{d} = -d - 2$. Examinons maintenant comment ils se comportent, lorsqu'on fait subir des substitutions appartenant au groupe g à ζ_1 et ζ_2 .

Soit U_i une substitution arbitraire du groupe g . Nous écrivons donc

$$(21) \quad \Lambda_{\mu\nu}(\zeta_1 \zeta_2; \xi_1 \xi_2) = \sum_k A_{\mu\nu}^{(k)} \mu_k^{-1} \frac{G_\nu(U_i(\xi_1 \xi_2))}{(\zeta^{(k)} \xi^{(i)}) G_\nu(\zeta_1^{(k)} \zeta_2^{(k)})}$$

Posons

$$U_k U_i^{-1} = U_l; \quad \mu_k \mu_i^{-1} = \mu_l$$

On a donc

$$A_{\mu\nu}^{(k)} = A_{\mu 1}^{(i)} A_{1\nu}^{(i)} + A_{\mu 2}^{(i)} A_{2\nu}^{(i)} + \dots + A_{\mu n}^{(i)} A_{n\nu}^{(i)}$$

$$(\zeta^{(k)} \xi^{(i)}) = (\zeta^{(l)} \xi) \quad G_\nu(\zeta_1^{(k)} \zeta_2^{(k)}) = G_\nu(U_i(\zeta_1^{(l)} \zeta_2^{(l)}))$$

Si l'on se sert de cela dans (21) on trouve

$$(22) \quad \Lambda_{\mu\nu}(\zeta_1 \zeta_2; \xi_1 \xi_2) = A_{1\nu}^{(i)} \mu_i^{-1} \sum_l A_{\mu l}^{(l)} \mu_l^{-1} \frac{G_\nu(U_i(\xi_1 \xi_2))}{(\zeta^{(l)} \xi) G_\nu(U_i(\zeta_1^{(l)} \zeta_2^{(l)}))} + \dots +$$

$$+ \dots + A_{n\nu}^{(i)} \mu_i^{-1} \sum_l A_{\mu n}^{(l)} \mu_l^{-1} \frac{G_\nu(U_i(\xi_1 \xi_2))}{(\zeta^{(l)} \xi) G_\nu(U_i(\zeta_1^{(l)} \zeta_2^{(l)}))} =$$

$$= A_{1\nu}^{(i)} \mu_i^{-1} \Lambda_{\mu 1}^{(i)}(\zeta_1 \zeta_2; \xi_1 \xi_2) + \dots + A_{n\nu}^{(i)} \mu_i^{-1} \Lambda_{\mu n}^{(i)}(\zeta_1 \zeta_2; \xi_1 \xi_2).$$

Si maintenant $\Lambda_{\mu\nu}^{(i)}(\zeta_1 \zeta_2; \xi_1 \xi_2)$ sont des formes identiques à $\Lambda_{\mu\nu}(\zeta_1 \zeta_2; \xi_1 \xi_2)$, les formes $\Lambda_{\mu\nu}(\zeta_1 \zeta_2; \xi_1 \xi_2)$ ($\nu = 1, 2 \dots n$) sont des formes zétafuchsiennes d'un groupe G_1 , réciproques à G . Mais cela est impossible, comme on peut le montrer de la manière suivante.

$\Lambda_{\mu\nu}$, considéré comme forme de ζ_1 et ζ_2 , a un seul pôle. Si nous désignons par λ_i' le plus grand des nombres $\lambda_{\nu i}$ ($\nu = 1, 2 \dots n$), on a

$$\delta \geq \sum \lambda_i' - 1$$

Mais

$$\delta + \bar{\delta} = 2p - 2 + \sum \left(1 - \frac{1}{l_i}\right)$$

et par conséquent

$$(23) \quad \bar{\delta} \leq 2p - 2 + \sum \left(1 - \frac{1}{l_i}\right) - \sum \lambda_i' + 1$$

$\Lambda_{\mu\nu}$, considéré comme forme de ξ_1 et ξ_2 , a aussi un seul pôle. Si nous introduisons une désignation analogue $\bar{\lambda}_i'$ comme le plus grand des nombres $\bar{\lambda}_{\nu i}$ ($\nu = 1, 2 \dots n$), on a

$$(24) \quad \bar{\delta}' \geq \sum \bar{\lambda}_i' - 1.$$

De (21) et de (22) on tire

$$0 \leq 2p - 2 + \sum \left(1 - \frac{1}{l_i}\right) - \sum \lambda_i' - \sum \bar{\lambda}_i' + 2$$

ce qui est absurde.

Formons maintenant la différence

$$(25) \quad \Lambda_{\mu\nu}^{(i)}(\zeta_1, \zeta_2; \xi_1, \xi_2) - \Lambda_{\mu\nu}(\zeta_1, \zeta_2; \zeta_1, \zeta_2) = \omega_{\mu\nu}(\zeta_1, \zeta_2).$$

Comme $\omega_{\mu\nu}(\zeta_1, \zeta_2)$ ne peuvent disparaître identiquement, les formes considérées comme formes de ζ_1 et ζ_2 , doivent être des séries Z qui manquent de pôles.

Admettons que $\Phi_\mu(\zeta_1, \zeta_2)$ ($\mu = 1, 2 \dots n$) soit un système de formes avec de simples pôles en ${}^{(\nu)}\xi_1 {}^{(\nu)}\xi_2$ ($\nu = 1, 2 \dots s$). On peut alors écrire.

$$(26) \quad \Phi_\mu(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{\nu=1}^s \left[C_1^{(\nu)} \Lambda_{\mu 1}(\zeta_1, \zeta_2; {}^{(\nu)}\xi_1 {}^{(\nu)}\xi_2) + \dots + C_n^{(\nu)} \Lambda_{\mu n}(\zeta_1, \zeta_2; {}^{(\nu)}\xi_1 {}^{(\nu)}\xi_2) \right] +$$

$$+ g_\mu(\zeta_1, \zeta_2) \quad (\mu = 1, 2 \dots n)$$

où $g_\mu(\zeta_1, \zeta_2)$ sont des formes entières zétafuchsienues.

Nous allons montrer maintenant que $g_\mu(\zeta_1, \zeta_2)$ peut toujours s'exprimer comme une combinaison linéaire d'un certain nombre de séries Z entières et indépendantes.

§ 11. Formons les formes

$$(27) \quad \Psi_\nu(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^s \left[B_1^{(i)} \Lambda_{1\nu}({}^{(i)}\zeta_1, {}^{(i)}\zeta_2; \xi_1, \xi_2) + \dots + B_n^{(i)} \Lambda_{n\nu}({}^{(i)}\zeta_1, {}^{(i)}\zeta_2; \xi_1, \xi_2) \right].$$

Faisons subir alors la substitution u_i à ξ_1 et ξ_2 . Nous obtenons d'après (25)

$$\Psi_\nu(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}) = A_1^{(i)} \mu_i^{-1} \Psi_\nu(\xi_1, \xi_2) + \dots + A_{n\nu}^{(i)} \mu_i^{-1} \Psi_n(\xi_1, \xi_2) +$$

$$+ \sum_{i=1}^s \left[B_1^{(i)} \omega_{1\nu}({}^{(i)}\zeta_1, {}^{(i)}\zeta_2) + \dots + B_n^{(i)} \omega_{n\nu}({}^{(i)}\zeta_1, {}^{(i)}\zeta_2) \right].$$

Déterminons maintenant les constantes $B_i^{(i)}$ de telle manière que $\Psi_\nu(\xi_1, \xi_2)$ deviennent des formes zétafuchsienues du groupe réciproque.

Admettons que nous ayons ρ séries Z linéairement indépendantes:

$$g'_{\mu}(\zeta_1 \zeta_2), g_{\mu}^{(2)}(\zeta_1 \zeta_2), \dots g_{\mu}^{(p)}(\zeta_1 \zeta_2).$$

Nous obtenons alors les équations suivantes:

$$\sum_{t=1}^{\bar{s}} \left[B_1^{(t)} g_1^{(t)}(\zeta_1 \zeta_2) + \dots + B_n^{(t)} g_n^{(t)}(\zeta_1 \zeta_2) \right] = 0.$$

$$\sum_{t=1}^{\bar{s}} \left[B_1^{(t)} g_1^{(p)}(\zeta_1 \zeta_2) + \dots + B_n^{(t)} g_n^{(p)}(\zeta_1 \zeta_2) \right] = 0.$$

Nous pouvons maintenant calculer les constantes $B_i^{(t)}$ si

$$\rho + 1 \leq n\bar{s}.$$

Choisissons le nombre de pôles $\bar{s}$ de telle manière que

$$\rho + 1 = n\bar{s} - r \quad n = r \geq 0.$$

Le nombre de formes linéairement indépendantes du système de formes réciproques avec $\bar{s}$ pôles est cependant

$$n(\bar{\delta} + \bar{s} - p + 1) - \Sigma(\bar{\lambda})_i.$$

Parmi les constantes $B_i^{(t)}$ nous pouvons choisir $n\bar{s} - \rho$ arbitrairement.

Ou peut en tirer

$$n(\bar{\delta} + \bar{s} - p + 1) - \Sigma(\bar{\lambda})_i \geq r + 1$$

donc

$$n\bar{s} \geq r + 1 - n(\bar{\delta} - p + 1) + \Sigma(\lambda)_i.$$

Mais

$$\bar{\delta} + \bar{s} = 2p - 2 + \Sigma \left(1 - \frac{1}{l_i} \right) \text{ et } \Sigma(\lambda)_i + \Sigma(\bar{\lambda})_i = n \Sigma \left(1 - \frac{1}{l_i} \right).$$

On trouve donc

$$n\bar{s} \geq r + 1 + n(\bar{\delta} - p + 1) - \Sigma(\lambda)_i$$

et finalement

$$\rho \geq n(\bar{\delta} - p + 1) - \Sigma(\lambda)_i.$$

Mais d'autre part le nombre de formes entières linéairement indépendantes du système de formes donné est

$$n(\bar{\delta} - p + 1) - \Sigma(\lambda)_i.$$

On peut donc tirer la conclusion que

$$(28) \quad \rho = n(\delta - p + 1) - \Sigma(\lambda)_i.$$

Parmi les $n\bar{s}$ constantes $B_i^{(i)}$ on peut choisir $n\bar{s} = n(\delta - p + 1) + \Sigma(\lambda)_i$ arbitrairement.

Mais

$$n\bar{s} = n(\delta - p + 1) + \Sigma(\lambda)_i = n(\bar{\delta} + \bar{s} - p + 1) - \Sigma(\bar{\lambda})_i.$$

Ce nombre est donc égal à celui des formes linéairement indépendantes du système réciproque avec $\bar{s}$ pôles.

On voit par là que toutes les formes du degré $d < -2$ d'un système de formes donné peuvent être exprimées par les séries Z de Poincaré

et que toutes les formes du degré $\bar{d} > 0$, du système de formes réciproque peuvent être exprimées par les formes $\Lambda_{\mu\nu}$. Cependant on ne doit pas trouver en général de pôles aux sommets elliptiques.

§ 12. Nous avons jusqu'ici complètement laissé de côté les sommets paraboliques.

Recherchons donc comment les séries Z se comportent lorsque ζ s'approche d'un sommet parabolique p .

Je me borne à examiner

$$Z_{\mu\nu}(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{i_1} A_{\mu\nu}^{(i_1)} \mu_{i_1}^{-1} \frac{1}{(\zeta_1^{(i_1)} - a \zeta_2^{(i_2)})^{2m}}.$$

On voit facilement comment l'on doit procéder lorsque $H_\nu(\zeta_1, \zeta_2)$ est une forme rationnelle générale.

Soit $\zeta_1 s = \alpha \zeta_1 + \rho \zeta_2$; $\zeta_2 s = \gamma \zeta_1 + \delta \zeta_2$ une substitution parabolique du groupe g . Appelons S une substitution correspondante de G . s peut donc s'écrire.

$$\begin{aligned} \zeta_1 s &= \zeta_1 (1 + rp) - rp^2 \zeta_2 \\ \zeta_2 s &= \zeta_1 r + (1 - rp) \zeta_2. \end{aligned}$$

Mais chaque substitution de g peut s'écrire sous la forme

$$s_{i_1} = s^t s_i(t = -\infty \dots + \infty).$$

Par une transformation on peut toujours faire en sorte que S^{-t} soit d'une forme canonique, c'est-à-dire que S^{-1} puisse s'écrire, si les racines de l'équation fondamentale de la substitution sont simples

$$1) \quad Z_\nu(\zeta_1, \zeta_2) = m_\nu Z_\nu(\zeta_1, \zeta_2) \quad m_\nu = e^{-2\pi i l_\nu}$$

ou si les racines sont multiples

$$\begin{aligned} 2) \quad Z_1' &= m_1 Z_1 \\ Z_2' &= m_1 (Z_2 - Z_1) \\ &\vdots \\ Z_v' &= m_1 (Z_v - Z_{v-1}) \end{aligned}$$

Considérons d'abord le cas 1)

Faisons maintenant la sommation par rapport à t . Posons

$$\frac{1}{r(\zeta - p)} = z; \quad \frac{1}{r(as_i^{-1} - p)} = b_i.$$

On a *

$$(30) \quad \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{m_{\mu}^t}{t + 2 - b_i} = 2\pi i \frac{e^{2\pi i \lambda_{\mu}(z - b_i)}}{e^{2\pi i(z - b_i)} - 1}$$

Mais si a est situé en dehors du cercle fondamental que l'on admet être le cercle de l'unité, on a

$$\Im \left(\frac{1}{r(\zeta - p)} - \frac{1}{r(as_i^{-1} - p)} \right) > 0.$$

Si nous posons en effet $r = \rho e^{i\varphi}$ et $p = e^{i\theta}$ on a $\varphi + \theta = \frac{\pi}{2}$.

Il n'y a que peu de modification si nous admettons que $\theta = 0$; $r = i\rho$.

Si l'on pose $\zeta = x + iy$ $as_i^{-1} = c + id$ on trouve

$$\Im \left(\frac{1}{r(\zeta - p)} - \frac{1}{r(as_i^{-1} - p)} \right) = \frac{1 - x}{(x - 1)^2 + y^2} - \frac{1 - c}{(c - 1)^2 + d^2} = \frac{1}{PA_1} - \frac{1}{PA_1'}.$$

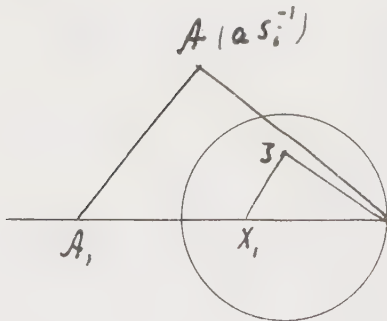
On a donc

$$\frac{1}{e^{2\pi i(z - b_i)} - 1} = - \sum_{t=0}^{t=\infty} e^{2\pi i t(z - b_i)}$$

(30) devient alors

$$\rho \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{m_{\mu}^t}{t + 2 - b_i} = - 2\pi i \sum_{t=0}^{t=\infty} e^{2\pi i(z - b_i)(t + \lambda_{\mu})}.$$

Différentions, par rapport à z , $2m - 1$ fois et nous obtenons



* Tannery-Molk: Éléments de la théorie des fonctions elliptiques tome I p. 109.

$$(31) \quad \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{m_{\mu}^t}{(t+2-b_i)^{2m}} = \frac{(2\pi i)^{2m}}{(2m-1)!} \sum_{t=0}^{t=\infty} e^{2\pi i(z-b_i)(t+\lambda_{\mu})} (t+\lambda_{\mu})^{2m-1}.$$

Nous obtenons donc

$$(32) \quad Z_{\mu\nu}(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{(2\pi i)^{2m}}{(2m-1)!} \sum_{t=0}^{\infty} (t+\lambda_{\mu})^{2m-1} \frac{e^{\frac{2\pi i(t+\lambda_{\mu})}{r(\zeta-p)}}}{r^{2m}(\zeta_1-p)(\zeta_2-p)^{2m}} \Psi_{\mu\nu}(a; tm)$$

où nous avons posé

$$\Psi_{\mu\nu}(a; tm) = \sum_i A_{\mu\nu}^{(i)} \frac{e^{-\frac{2\pi i(t+\lambda_{\mu})}{r(as_i^{-1}-p)}}}{(a_i-p)^{2m}(as_i^{-1}-p)^{2m}}.$$

Mais $\Re\left(\frac{1}{r(\zeta-p)}\right)$ est positif.

Si ζ tombe en p , on a $Z_{\mu\nu}(p_1, p_2) = 0$.

Examinons maintenant le cas 2). S^{-t} peut s'écrire

$$(33) \quad \begin{aligned} Z_1^{(t)} &= m^t Z_1 \\ Z_2^{(t)} &= m^t (Z_2 - tZ_1) \\ &\quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ Z_{\nu}^{(t)} &= m^t \left[Z_{\nu} - \binom{t}{1} Z_{\nu-1} + \binom{t}{2} Z_{\nu-2} \dots (-1)^{\nu-1} Z_1 \right] \end{aligned}$$

et le coefficient $A_{\mu\nu}^{i_1}$ de la substitution $S_i^{-1} S^{-t}$ devient

$$A_{\mu\nu}^{i_1} = m^t \left[A_{\mu\nu}^{(i)} - \binom{t}{1} A_{\mu-1, \nu}^{(i)} + \binom{t}{2} A_{\mu-2, \nu}^{(i)} \dots (-1)^{\mu-1} \binom{t}{\mu-1} A_{1\nu}^{(i)} \right].$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} Z_{\mu\nu} &= \sum_{(i)} \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{m^t \left[A_{\mu\nu}^{(i)} - \binom{t}{1} A_{\mu-1, \nu}^{(i)} + \binom{t}{2} A_{\mu-2, \nu}^{(i)} \dots (-1)^{\mu-1} \binom{t}{\mu-1} A_{1\nu}^{(i)} \right]}{r^{2m}(p-as_i^{-1})^{2m}(\zeta_1-\zeta_2 p)^{2m} \left(t + \frac{1}{r(\zeta-p)} - \frac{1}{r(as_i^{-1}-p)} \right)^{2m} (a_i-p)^{2m}} \\ \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{m^t}{(t+z-b_i)^{2m}} &= \frac{(2\pi i)^{2m}}{(2m-1)!} \sum_{t=0}^{t=\infty} (\lambda+t)^{2m-1} e^{2\pi i(z-b_i)(\lambda+t)} = \sum_{t=0}^{\infty} e^{2\pi i(z-b_i)(\lambda+t)} Y_{2-m-1}^{(t)} \\ \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{\binom{t}{1} m^t}{(t+z-b_i)^{2m}} &= \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{m^t}{(t+z-b_i)^{2m-1}} - (z-b_i) \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{m^t}{(t+z-b_i)^{2m}} = \\ &= - \sum_{t=0}^{t=\infty} e^{2\pi i(z-b_i)(\lambda+t)} Y_{2m-2}^{(t)} - (z-b_i) \sum_{t=0}^{t=\infty} e^{2\pi i(z-b_i)(\lambda+t)} Y_{2m-1}^{(t)}; \end{aligned}$$

$$\sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{\binom{t}{\rho} m^t}{(t+z-b_i)^{2m}} = \frac{(-1)^\rho}{\rho!} \left[\sum_{t=0}^{t=\infty} e^{2\pi i(z-b_i)(\lambda+t)} Y_{2m-\rho-1}^{(t)} + \right. \\ \left. + \sum_{t=0}^{t=\infty} \sum_{s=0}^{s=\rho-1} (z-b_i+s) e^{2\pi i(z-b_i)(\lambda+t)} Y_{2m-\rho}^{(t)} + \right. \\ \left. + \sum_{t=0}^{t=\infty} e^{2\pi i(z-b_i)(\lambda+t)} Y_{2m-\rho+1}^{(t)} \cdot \prod_{s=0}^{s=\rho-1} (z-b_i+s) + \dots + \right. \\ \left. + (z-b_i) \dots (z-b_i+\rho-1) \sum_{t=0}^{t=\infty} e^{2\pi i(z-b_i)(\lambda+t)} Y_{2m-1}^{(t)} \right];$$

où nous désignons par $\prod_{s=0}^{s=\rho-1} (z-b_i+s)$ la somme des produits

$$(z-b_i+s_1)(z-b_i+s_2) \dots (z-b_i+s_{l_2})$$

Nous pouvons donc écrire

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{\left[A_{\mu\nu}^{(i)} - \binom{t}{1} A_{\mu-1,\nu}^{(i)} + \binom{t}{2} A_{\mu-2,\nu}^{(i)} \dots (-1)^{\mu-1} \binom{t}{\mu-1} A_{1\nu}^{(i)} \right] m^t}{\left(t + \frac{1}{r(\xi-p)} - \frac{1}{r(as_i^{-1}-p)} \right)^{2m}} = \left[A_{\mu\nu}^{(i)} + b_i A_{\mu-1,\nu}^{(i)} + \right. \\ \left. + \frac{b_i(b_i-1)}{2!} A_{\mu-2,\nu}^{(i)} + \dots + \frac{b_i(b_i-1) \dots (b_i-\mu+2)}{(\mu-1)!} A_{1\nu}^{(i)} \right] \cdot \sum_{t=0}^{\infty} e^{2\pi i(z-b_i)(\lambda+t)} Y_{2m-1}^{(t)} - \\ - \left[A_{\mu-1,\nu}^{(i)} + b_i A_{\mu-2,\nu}^{(i)} + \dots + \frac{b_i(b_i-1) \dots (b_i-\mu+3)}{(\mu-2)!} \right] \sum_{t=0}^{\infty} e^{2\pi i(z-b_i)(\lambda+t)} Y_{2m-2}^{(t)} + \\ + z Y_{2m-1}^{(t)} + \dots + \frac{(-1)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} A_{1\nu}^{(i)} \sum_{t=0}^{\infty} e^{2\pi i(z-b_i)(\lambda+t)} Y_{2m-\mu}^{(t)} + \\ + \frac{d^{\mu-2} \{z(z+1) \dots (z+\mu-2)\}}{dz^{\mu-2}} \cdot \frac{1}{(\mu-2)!} \sum_{t=0}^{\infty} e^{2\pi i(z-b_i)(\lambda+t)} Y_{2m-\mu+1}^{(t)} + \dots + \\ + z(z+1) \dots (z+\mu-2) \sum_{t=0}^{\infty} e^{2\pi i(z-b_i)(\lambda+t)} Y_{2m-1}^{(t)}.$$

Posons ici

$$\Psi_{\mu\nu}(a_i; tm) = \sum_i \frac{e^{-2\pi i b_i(\lambda+t)} \left[A_{\mu\nu}^{(i)} + b_i A_{\mu-1,\nu}^{(i)} + \dots + A_{1\nu}^{(i)} \frac{b_i(b_i-1) \dots (b_i-\mu+2)}{(\mu-1)!} \right] \mu_i^{-1}}{(\alpha_i - \alpha_i')^{2m} (as_i^{-1} - p)^{2m}}$$

et nous obtenons le développement suivant

$$(32_1) \quad Z_{\mu\nu}(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{r^{2m}(\zeta_1 - \zeta_2)^{2m}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \Psi_{\mu\nu}(a; tm) e^{2\pi i z(\lambda+t)} Y_{2m-1}^{(t)} + \dots + \right. \\ \left. + \frac{(p-1)^{p-1}}{p-1} \Psi_{\mu\nu}(a; tm) e^{2\pi i z(\lambda+t)} \left[Y_{2m-1}^{(t)} + \dots + z(z+1) \dots (z+p-2) Y_{2m-1}^{(t)} \right] \right\}$$

Par ce développement nous voyons comment $Z_{\mu}(\zeta_1, \zeta_2)$ se comporte lorsque ζ tombe en p . $\zeta = p$ est alors un zéro.

§ 13. Nous avons dans ce qui précède admis que $H_{\nu}(\zeta_1, \zeta_2)$ était une forme rationnelle dont les pôles étaient situés à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle fondamental. Cette supposition n'est cependant pas nécessaire.

Soit a un point sur le cercle de l'unité. Nous avons alors

$$|\zeta_i - a| > \frac{1}{2}(1 - |\zeta_i|^2) |\gamma_i \zeta + \delta_i|^{-2} *$$

La série

$$\sum A_{\mu\nu}^{(i)} \frac{1}{(\zeta_i - a)^s} \frac{1}{(\gamma_i \zeta + \delta_i)^{2m}}$$

converge certainement si $2m - 2s = 2m_1$, et si $2m_1$ est une limite inférieure de convergence, lorsqu'il n'y a pas de pôles sur le cercle fondamental.

Si a n'est pas un sommet parabolique, il ne peut se produire aucune nouvelle singularité dans la série. Si a est un sommet parabolique, on pourrait s'attendre à ce que la série ait un pôle en a . Ce n'est pas cependant le cas, comme on le voit immédiatement d'après les développements du paragraphe précédent qui s'appliquent toujours. On n'obtient donc rien en introduisant des pôles semblables en $H_{\nu}(\zeta_1, \zeta_2)$.

* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse: Fonctions modulaires et fuchsiennes par Poincaré.

CHAPITRE III.

§ 14. Dans le chapitre précédent nous avons montré que toutes les séries zétafuchsiennes peuvent s'exprimer linéairement par un nombre de séries entières zétafuchsiennes linéairement indépendantes. Notre objet, dans ce chapitre, est de montrer comment un semblable système de séries entières linéairement indépendantes peut être choisi et d'en déduire les relations qui se trouvent entre les différentes séries.

Considérons la série:

$$Z_{\mu,\nu}(\zeta) = \sum_i A_{\mu,\nu}^{(i)} H_\nu(\zeta s_i) \cdot \frac{1}{(\gamma_i \zeta + \delta_i)^{2m}}.$$

Décomposons $H_\nu(\zeta)$ en fractions et nous obtenons des termes de cet aspect:

$$\frac{A_k}{(\zeta - a_k)^s} \text{ ou } B_k \zeta^s.$$

Posons d'abord $H_\nu(\zeta) = \frac{1}{\zeta - a}$. Nous admettons que le groupe fuchsien g ayant le cercle de l'unité comme cercle fondamental contient une substitution parabolique s :

$$\zeta_1 - p = \frac{1}{\zeta - p} + r.$$

Appelons S une substitution correspondante du groupe zétafuchsien G . On peut admettre que G est si transformé que S devient d'une forme canonique. Occupons nous d'abord du cas où toutes les racines de l'équation fondamentale de S sont simples.

Toutes les substitutions du groupe G peuvent alors s'écrire

$$S_{i_1} = S_i S'(t = -\infty \dots + \infty).$$

On a alors

$$A_{\mu,\nu}^{(i)} = A_{\mu,\nu}^{(i)} m_\nu^t; \quad m_\nu = e^{-2\pi i \lambda_\nu}.$$

Si nous employons maintenant un procédé d'exposition homogène et si nous posons $\zeta_i = \frac{\xi_i}{\eta_i}$ nous trouvons

$$Z_{\mu, \nu}(\xi \eta) = \sum_i A_{\mu, \nu}^{(i)} \frac{1}{(\xi_i - a \eta_i) \eta_i^{2m-1}} =$$

$$= \sum_i \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{A_{\mu, \nu}^{(i)} m'_t}{[tr \xi_i + \eta_i(1 - trp)]^{2m-1} [\xi_i(1 + trp) - \eta_i trp^2 - a(1 - trp) \eta_i - atr \xi_i]}$$

ou bien

$$Z_{\mu}(\xi \eta) = \sum_i \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{A_{\mu, \nu}^{(i)} m'_t}{(\xi_i - \eta_i p^{2m} r^{2m} (p - a) (t + z_i)^{2m-1} (t + z_i - b))}$$

où nous avons posé

$$\frac{1}{r(\xi_i - p)} = z_i; \quad \frac{1}{r(a - p)} = b.$$

Faisons la sommation par rapport à t .

$$\frac{1}{(t + z_i)^{2m-1} (t + z_i - b)} = \frac{1}{b(t + z_i)^{2m-1}} - \frac{1}{b^2(t + z_i)^{2m-2}} - \dots -$$

$$- \frac{1}{b^{2m-1}(t + z_i)} + \frac{1}{b^{2m-1}(t + z_i - b)}.$$

Mais on a

$$\sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{m'_t}{(t + z_i)^s} = -2\pi i \sum_{t=0}^{\infty} e^{2\pi i z_i (\lambda_\nu + t)}; \quad 0 < \lambda_\nu < 1; \quad \Im(z_i) > 0$$

et

$$\sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{m'_t}{(t + z_i)^s} = (-1)^s \frac{(2\pi i)^s}{(s-1)!} \sum_{t=0}^{\infty} e^{2\pi i z_i (\lambda_\nu + t)} (\lambda_\nu + t)^{s-1};$$

Si nous nous servons de cela, et si nous remarquons que $\Im(z_i) > 0$ et que $\Im(z_i - b) > 0$, si a est situé à l'intérieur du cercle fondamental, nous trouvons

$$Z_{\mu, \nu}(\xi \eta) = \sum_i \sum_{t=0}^{\infty} \frac{2\pi i A_{\mu, \nu}^{(i)}}{(\xi_i - p \eta_i)^{2m}} \cdot \frac{b}{r^{2m-1}} \left[\frac{1}{b^{2m-1}} e^{2\pi i (z_i - b) (\lambda_\nu + t)} + \right.$$

$$\left. + e^{2\pi i z_i (\lambda_\nu + t)} \left(\frac{1}{b^{2m-1}} - \frac{2\pi i (\lambda_\nu + t)}{1! b^{2m-2}} + \dots + \frac{(2\pi i (\lambda_\nu + t))^{2m-2}}{(2m-2)! b} \right) \right].$$

Employons maintenant un procédé d'exposition inhomogène et posons

$$(34) \quad \Psi_{\mu\nu}(\zeta; tm) = \sum_i \frac{A_{\mu\nu}^{(i)} e^{2\pi i z_i t + i \lambda_\nu}}{(\zeta_i - \rho)^{2m} (\gamma_i \zeta + \delta_i)^{2m}}.$$

Nous obtenons alors le développement

$$(35) \quad Z_{\mu\nu}(\zeta) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{2\pi i}{\gamma^{2m-1}} \Psi_{\mu\nu}(\zeta; tm) \left[-\frac{e^{-2\pi i b(\lambda_\nu + t)}}{b^{2m-2}} + \frac{1}{b^{2m-2}} \right. \\ \left. - \frac{2\pi i(\lambda_\nu + t)}{b^{2m-3}} \cdot \frac{1}{1!} + \dots + \frac{(2\pi i(\lambda_\nu + t))^{2m-2}}{(2m-2)!} \right].$$

Par différentiation par rapport à a on obtient alors un développement analogue si $H_\nu(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - a)^s}$.

On procède d'une manière analogue si $H_\nu(\zeta) = \zeta^s$.

Les fonctions $\Psi_{\mu\nu}(\zeta; tm)$ ($t = 0, 1 \dots \infty$) sont elles-mêmes des séries zétafuchiennes. Toutes les séries entières zétafuchiennes peuvent donc s'exprimer à l'aide de ces fonctions. Mais parmi ces fonctions il n'y en a que ρ qui soient linéairement indépendantes.

Nous allons montrer dans ce qui suit quelles sont celles qui peuvent être choisies pour un système de fonctions linéairement indépendantes.

§ 15. Partons de

$$Z_\mu(\zeta) = \sum_i \frac{A_{\mu\nu}^{(i)}}{(\zeta_i - a)^{2m} (\gamma_i \zeta + \delta_i)^{2m}}$$

où nous admettons que a est situé à l'extérieur et ζ à l'intérieur du cercle fondamental.

Nous pouvons donc écrire à cause de (35)

$$Z_\mu(\zeta) = \frac{(2\pi i)^{2m}}{\gamma^{2m} (\rho - a)^{2m} (2m-1)!} \sum_{t=0}^{\infty} e^{-2\pi i b(\lambda_\nu + t)} (\lambda_\nu + t)^{2m-1} \Psi_{\mu\nu}(\zeta; tm).$$

Posons

$$\Lambda_\mu = \left(\frac{d\zeta}{dx} \right)^{m-1} \frac{Z_\mu(x)}{(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_q)}$$

où x est une fonction fuchsienne de ζ et où $Z_\mu(x)$ est une fonction telle que, lorsqu'on fait décrire à x certains contours fermés sur la surface de Riemann correspondante, elle subit certaines substitutions linéaires appartenant au groupe $\bar{G}$ conjugué avec le groupe G , c'est à dire que $\bar{G}$ est tiré de G par changement de i en $-i$. En outre nous admettons que $Z_\mu(x)$ est de telle manière

que Λ_μ est partout fini sur la surface de Riemann à l'exception des points, où $x = c_1, c_2, \dots, c_q$, où Λ_μ est supposé avoir des pôles simples.

Nous pouvons considérer Λ_μ comme fonctions de ζ et nous trouvons alors *

$$\Lambda_\mu = \sum_k \sum_\nu B_{k\nu} \Phi_{\mu\nu}(\zeta_1 a_k)$$

où a_k sont les pôles dans le plan ζ , et où

$$\Phi_{\mu\nu}(a_k) = \sum_{i_1} \frac{a_{\mu\nu}^{(i_1)}}{(\zeta - a_k s_{i_1}) (\gamma_{i_1} a_k + \delta_{i_1})^{2m}}.$$

Différentions par rapport à ζ $2m - 1$ fois:

$$(36) \quad -\frac{1}{(2m-1)!} D_3^{2m-1} \Phi_{\mu\nu}(\zeta_1 a_k) = \sum_{i_1} \frac{\partial_{\mu\nu}^{(i_1)}}{(\zeta - a_k s_{i_1})^{2m} (\gamma_{i_1} a_k + \delta_{i_1})^{2m}} = \\ = \sum_{i_1} \frac{\bar{A}_{\mu\nu}^{(i_1)}}{(\zeta s_{i_1} - a_k)^{2m} (\gamma_{i_1} \zeta + \delta_{i_1})^{2m}}.$$

Posons maintenant

$$\xi_{\nu\mu} \left[\frac{\varphi(a_k)}{(\zeta - a_k)} \right] = \sum_{i_1} \frac{\varphi(a_k s_{i_1}) a_{\mu\nu}^{i_1}}{(\zeta - a_k s_{i_1}) (\gamma_{i_1} a_k + \delta_{i_1})^{2m-1}}$$

où $\varphi(z)$ est une fonction rationnelle qui est partout finie à l'intérieur du cercle fondamental.

On a alors

$$\Lambda_\mu = \sum_k \sum_\nu B_{k\nu} \xi_{\nu\mu} \left[\frac{1}{\zeta - a_k} \right].$$

Si l'on se sert d'une démonstration analogue que Poincaré a exposée dans son « *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* », on obtient

$$\varphi(\zeta) \Lambda_\mu = \sum_k \sum_\nu B_{k\nu} \xi_{\nu\mu} \left[\frac{\varphi(a_k)}{(\zeta - a_k)} \right].$$

De ces deux égalités nous tirons

$$\sum_k \sum_\nu B_{k\nu} \xi_{\nu\mu} \left[\frac{\varphi(z) - \varphi(a_k)}{z - a_k} \right] = 0.$$

Choisissons maintenant $\varphi(a_k) = (\zeta - a_k) H(a_k)$ où $H(\zeta)$ est partout fini à l'intérieur du cercle de l'unité et nous trouvons

* Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes p. 247.

$$\sum_k \sum_v B_{k\nu} \sum_{\zeta_1} [H(a_k)] = 0$$

Posons spécialement

$$H(a_k) = \frac{1}{(\zeta_1 - a_k)^{2m}}$$

où ζ_1 se trouve en dehors et a_k en dedans du cercle de l'unité et nous obtenons finalement

$$(37) \quad \sum_k \sum_v B_{k\nu} D_{\zeta_1}^{2m-1} \Phi_{\mu\nu}(\zeta_1, a_k) = 0$$

Revenons maintenant à la fonction Λ_μ

$$\Lambda_\mu = \left(\frac{dz}{dx} \right)^{m-1} \frac{Z_\mu(x)}{(x - c_1) \dots (x - c_q)}$$

qui peut aussi s'écrire

$$\Lambda_\mu = \left(\frac{dz}{dx} \right)^{m-1} \sum_{k=1}^{k=q} \frac{Z_\mu(x) A_k}{x - c_k}$$

avec la relation

$$(38) \quad \sum_{k=1}^{k=q} A_k c_k^h = 0 \quad (h=0, 1, 2 \dots q-2)$$

Mais d'autre part nous avons

$$\Lambda_\mu = \sum_k \sum_v B_{k\nu} \Phi_{\mu\nu}(\zeta a_k)$$

Entre $B_{k\nu}$ et A_k il existe donc la relation

$$(39) \quad B_{k\nu} = \left(\frac{da_k}{dc_k} \right)^m Z_\nu(c_k) A_k$$

L'identité (37) supposait ζ_1 en dehors et a_k en dedans du cercle de l'unité.

Si donc nous posons $\bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta'}$ et $\bar{a}'_k = \frac{1}{a'_k}$, $\bar{\zeta}$ se trouve en dedans et $\bar{a}'_k$ en dehors du cercle de l'unité.

Si ζ' subit une substitution s_i du groupe g , $\bar{\zeta}$ subit une substitution du groupe $\bar{g}$ avec des coefficients imaginairement conjugués.

Si donc, dans l'égalité (37), nous introduisons $\bar{\zeta}$ et $\bar{a}'_k$, nous obtenons

$$\sum_k \sum_v B'_{k\nu} \bar{a}'_k{}^{2m} \bar{\zeta}_1^{2m} D_{\bar{\zeta}}^{2m-1} \Phi_{\mu\nu}(\bar{\zeta}, \bar{a}'_k) = 0$$

avec

$$B'_{k\nu} = \left(d \frac{1}{\bar{a}'_k} \right)^m Z_\nu(c_k) A_k$$

Si dans cette égalité on change i en $-i$ on trouve

$$(40) \quad \sum_k \sum_\nu C_{k\nu} \sum_{i_1} \frac{a_{\mu\nu}^{(i_1)}}{(\zeta - a'_k s_{i_1})^{2m} (r_{i_1} a'_k + \delta_{i_1})^{2m}} = \\ = \sum_k \sum_\nu C_{k\nu} \sum_{i_1} \frac{A_{\mu\nu}^{(i_1)}}{(\zeta s_{i_1} - a'_k)^{2m} (r_{i_1} \zeta + \delta_{i_1})^{2m}} = 0$$

où $C_{k\nu}$ est la valeur imaginairement conjuguée de $B'_{k\nu} a_k'^{2m}$ que nous écrivons

$$C_{k\nu} = \overline{B'_{k\nu} a_k'^{2m}}$$

Le membre de gauche de (40) est une série zétafuchsienne par rapport à ζ avec le groupe fuchsien g et le groupe zétafuchsien G . ζ est à l'intérieur et a'_k à l'extérieur du cercle de l'unité. On peut donc se servir du développement (35).

On obtient

$$(41) \quad 0 = \sum_i \sum_{k=1}^{k=g} \sum_\nu \frac{1}{r^{2m} (p - a'_k)^{2m}} \sum_{t=0}^{t=\infty} e^{-2\pi i b'_k (\lambda_\nu + t)} (\lambda_\nu + t)^{2m-1} \Psi_{\mu\nu}(\zeta; tm) C_{k\nu}$$

c_k est une fonction fuchsienne de a_k (groupe g) et par conséquent aussi une fonction fuchsienne de $\bar{a}'_k$ (groupe $\bar{g}$). $\bar{c}_k$ est donc une fonction fuchsienne de a'_k (groupe g). Si au lieu de a'_k on introduit maintenant $\bar{c}_k$, on trouvera que le membre de droite de l'égalité (41) est une série de puissance de $\bar{c}_k$ avec des puissances décroissantes. Les coefficients sont des combinaisons linéaires des fonctions $\Psi_{\mu\nu}(\zeta; tm)$. Comme on peut montrer que ces coefficients sont égaux à 0, nous obtenons des relations entre les fonctions $\Psi_{\mu\nu}(\zeta; tm)$.

Entrons dans quelques détails.

Soit x une fonction fuchsienne de ζ telle que $\zeta = p$ réponde à $x = \infty$.

Nous avons donc

$$\frac{1}{x} = \sum_{t=1}^{t=\infty} \mu_t' e^{\frac{2\pi i t}{r(\zeta-p)}} = \sum_{t=1}^{t=\infty} \mu_t' e^{-\frac{2\pi i t}{pr}} e^{\frac{2\pi i t}{\bar{r}(\bar{\zeta}' - \bar{p})}}$$

et par conséquent

$$\frac{1}{c_k} = \sum_{t=1}^{t=\infty} \mu_t' e^{-\frac{2\pi i t}{pr}} e^{\frac{2\pi i t}{\bar{r}(\bar{a}'_k - \bar{p})}}$$

Changeons dans cette égalité i en $-i$, nous obtenons

$$(42) \quad \frac{1}{\bar{c}_k} = \sum_{t=1}^{t=\infty} v_t e^{-\frac{2\pi i t}{r(a'_k - p)}}$$

Par différentiation on obtient

$$-\frac{1}{x^2} \frac{dx}{d\bar{\zeta}'} = - \sum_{t=1}^{t=\infty} v_t' e^{-\frac{2\pi i t}{r(\bar{\zeta}' - \bar{p})}} e^{-\frac{2\pi i t}{r(\bar{\zeta}' - \bar{p})}} \cdot \frac{2\pi i t}{r(\bar{\zeta}' - \bar{p})^2}$$

De cela on tire

$$\frac{d\bar{\zeta}'}{dx} = (\bar{\zeta}' - \bar{p})^2 \sum_{t=1}^{t=\infty} \bar{v}_t e^{-\frac{2\pi i t}{r(\bar{\zeta}' - \bar{p})}}$$

D'où

$$\frac{d\bar{a}'_k}{d\bar{c}_k} = (\bar{a}'_k - \bar{p})^2 \sum_{t=1}^{t=\infty} \bar{v}_t e^{-\frac{2\pi i t}{r(\bar{a}'_k - \bar{p})}}$$

Changeons i en $-i$

$$(43) \quad \frac{da'_k}{d\bar{c}_k} = (a'_k - p)^2 \sum_{t=1}^{t=\infty} v_t e^{-\frac{2\pi i t}{r(a'_k - p)}}$$

De la relation (42) nous tirons

$$(44) \quad (\lambda_v + t)^{2m-1} e^{-\frac{2\pi i t}{r(a'_k - p)}} = \frac{1}{\bar{c}_k^{\lambda_v}} \sum_{h=t}^{h=\infty} \gamma_{th} \frac{1}{\bar{c}_k^h}$$

Si $|c_k|$ est suffisamment grand, on a

$$Z_v(c_k) = \frac{1}{\bar{c}_k^{\lambda_v}} (a_{0v} \bar{c}_k^s + a_{1v} \bar{c}_k^{s-1} + \dots); \quad \lambda_v + \lambda_{v'} = 1$$

$$s \leq q + m - 1$$

D'où

$$\overline{Z_v(c_k)} = \frac{1}{\bar{c}_k^{\lambda_{v'}}} (\bar{a}_{0v} \bar{c}_k^s + \bar{a}_{1v} \bar{c}_k^{s-1} + \dots)$$

Nous obtenons donc

$$(45) \quad \frac{1}{r^{2m}(a'_k - p)^{2m}} C_{kv} = (-1)^m \overline{Z_v(c_k)} \bar{A}_k \left(\frac{da'_k}{d\bar{c}_k} \right)^m \frac{1}{r(a'_k - p)^{2m}} = \frac{\bar{A}_k}{\bar{c}_k^{\lambda_v}} \sum_j \delta_{jv} \bar{c}_k^{-j};$$

$$j \geq m - s$$

Substituons maintenant (44) et (45) dans (41). Nous obtenons d'après $\lambda_v + \lambda_{v'} = 1$

$$0 = \sum_h \sum_j \sum_t \sum_v \gamma_{th} \delta_{jv} \Psi_{\mu v}(\zeta; tm) \sum_{k=1}^{k=q} \bar{A}_k \bar{c}_k^{-h-j-1}$$

Posons maintenant

$$\Omega_{\mu\nu}(p) = \sum_h \sum_j \gamma_{th} \delta_{j\nu} \Psi_{\mu\nu}(\xi; tm) \quad \text{et} \quad p = h + j + 1$$

Mais

$$j + 1 \geq m - s + 1 \geq 2 - q; \quad \text{alors} \quad p \geq 2 - q$$

Nous avons donc

$$0 = \sum_{p=2-q}^{p=\infty} \sum_{\nu} \Omega_{\mu\nu}(p) \sum_{k=1}^{k=q} (\bar{A}_k \bar{c}_k^{-p})$$

$\Omega_{\mu\nu}(p)$ est alors une combinaison linéaire de $\Psi_{\mu\nu}(0), \Psi_{\mu\nu}(1), \dots, \Psi_{\mu\nu}(p + q - 2)$.

Mais

$$\sum_{k=1}^{k=q} \bar{A}_k \bar{c}_k^p = 0 \quad \text{pour} \quad p = 0, 1, 2 \dots q - 2$$

Nous pouvons donc écrire

$$0 = \sum_{p=1}^{p=\infty} \sum_{\nu} \Omega_{\mu\nu}(p) \sum_k \bar{A}_k \bar{c}_k^{-p}$$

Nous allons montrer maintenant que $\sum_{\nu} \Omega_{\mu\nu}(p) = 0$.

Pour cela posons

$$F_{\mu}(\bar{c}_k) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \sum_{\nu} \Omega_{\mu\nu}(p) \bar{c}_k^{-p}$$

On a donc

$$\sum_k \bar{A}_k F_{\mu}(\bar{c}_k) = 0;$$

$$\sum_k \bar{A}_k \bar{c}_k^p = 0; \quad (p = 0, 1, 2 \dots q - 2)$$

De ces q égalités on tire

$$F_{\mu}(\bar{c}_k) = B_{q-2} \bar{c}_k^{q-2} + \dots + B_0$$

Mais $F_{\mu}(\bar{c}_k)$ peut-être développé par rapport aux puissances négatives de $\bar{c}_k$.

Il faut donc que $F_{\mu}(\bar{c}_k) = 0$ et par conséquent que

$$(46) \quad \sum_{\nu} \Omega_{\mu\nu}(p) = 0$$

Le groupe $\bar{G}$ à le même système d'exposant que le groupe réciproque à G .

Le nombre de fonctions entières linéairement indépendantes Λ_{μ} est donc $nq - \rho$.

Choisissons maintenant q de telle manière que

$$nq - \rho = n + r \quad 0 \leq r < n$$

Nous obtenons alors $n + r$ relations (46). Si nous donnons successivement à p des valeurs variables nous voyons que les fonctions $\Psi_{\mu\nu}(\zeta; tm)$ peuvent s'exprimer par ρ de ces fonctions et que ces ρ fonctions peuvent être choisies ainsi

$$\Psi_{\mu\nu}(\zeta; 0, m), \Psi_{\mu\nu}(\zeta; 1, m) \dots \Psi_{\mu\nu}(\zeta; \left(\frac{\rho + r}{n} - 2\right), m) \quad (\nu = 1, 2 \dots n)$$

et $n - r$ choisies parmi

$$\Psi_{\mu\nu}(\zeta; \left(\frac{\rho + r}{n} - 1\right), m) \quad (\nu = 1, 2 \dots n)$$

§ 16. Lorsqu'il s'agit d'écrire les relations entre les fonctions $\Psi_{\mu\nu}(\zeta; tm)$ les relations (46) sont illusoires lorsque les fonctions $Z_\mu(x)$ sont inconnues. Nous savons qu'elles existent mais leur développement nous est inconnu. Nous pouvons

cependant développer $\Psi_{\mu\nu}(\zeta; tm)$ par rapport à $e^{\frac{2\pi i}{r(\zeta - p)}}$ et obtenir de cette manière des égalités d'après lesquelles nous pouvons calculer les coefficients des relations.

Admettons que

$$(47) \Psi_{\mu\nu}(l) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left[k_{\nu 0} \Psi_{\mu\nu}^{(0)} + \dots k_{\nu \frac{\rho+r}{n}-2} \Psi_{\mu\nu} \left(\frac{\rho+r}{n} - 2 \right) \right] + \sum_{\nu=1}^{\nu=n-r} k_{\nu \frac{\rho+r}{n}-1} \Psi_{\mu\nu} \left(\frac{\rho+r}{n} - 1 \right)$$

Le développement de $\Psi_{\mu\nu}(l)$ se fait d'après la méthode que nous avons employée § 13 pour $Z_{\mu\nu}(\zeta)$.

Posons

$$s_i = s^t s_j; \quad (t = -\infty \dots +\infty)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta_i - p} &= \frac{r(\zeta - p)(\gamma_j p + \delta_j) \left(t + \frac{1}{r(\zeta - p)} - \frac{1}{r\left(-\frac{\delta_j}{\gamma_j} - p\right)} \right)}{r(\zeta - p)(\alpha_j - \gamma_j p)(p - ps_j^{-1}) \left(t + \frac{1}{r(\zeta - p)} - \frac{1}{r(ps_j^{-1} - p)} \right)} = \\ &= \frac{\gamma_j p + \delta_j}{r(p - ps_j^{-1})(\alpha_j - p\gamma_j)} - \frac{1}{r(ps_j^{-1} - p)^2 (\alpha_j - p\gamma_j)^2 \left(t + \frac{1}{r(\zeta - p)} - \frac{1}{r(ps_j^{-1} - p)} \right)} = \\ &= \frac{1}{r(ps_j^{-1} - p)} - \frac{1}{r(ps_j^{-1} - p)^2 (\alpha_j - p\gamma_j)^2 \left(t + \frac{1}{r(\zeta - p)} - \frac{1}{r(ps_j^{-1} - p)} \right)}. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\Psi_{\mu\nu}(\zeta; lm) = e^{\frac{2\pi i(l+\lambda_\nu)}{r(\zeta-p)}} \frac{A_{\mu\nu}^{(0)}}{r^{2m}(\zeta-p)^{2m}} +$$

$$+ \sum_j \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{e^{\frac{2\pi i(l+\lambda_\nu)}{r(p s_j^{-1}-p)}}}{r^{2m}(\zeta-p)^{2m}(\alpha_j - p s_j^{-1})^{2m} (p - p s_j^{-1})^{2m} \left(t + \frac{1}{r(\zeta-p)} - \frac{1}{r(p s_j^{-1}-p)} \right)^{2m}} \frac{A_{\mu\nu}^{(j)} m_\mu^t}{e^{\frac{2\pi i(l+\lambda_\nu)}{r(p s_j^{-1}-p)}}}$$

$$A_{\mu\nu}^{(0)} = 0 \quad (\mu \neq \nu); \quad A_{\mu\nu}^{(0)} = 1.$$

Si nous développons les fonctions exponentielles nous avons à sommer

$$\sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{m_\mu^t B_j^h}{(t+z-e_i)^{2m+h} h!} =$$

$$= \sum_{t=0}^{t=\infty} \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{B_j^h (-1)^{2m+h} \cdot 2\pi i e^{\frac{2\pi i(\lambda_\mu+t)(z-e_i)}{r(\zeta-p)}} 2\pi i(\lambda_\mu+t)^{2m+h-1}}{h! (2m+h-1)!}$$

où nous avons introduit les notations

$$B_j = \frac{2\pi i(l+\lambda_\nu)}{r(p s_j^{-1}-p)^2 (\alpha_j - p s_j^{-1})^2}; \quad z = \frac{1}{r(\zeta-p)}; \quad e_i = \frac{1}{r(p s_j^{-1}-p)}.$$

Posons

$$2\pi i \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{B_j^h (-1)^{2m+h} (2\pi i(\lambda_\mu+t))^{2m+h-1}}{h! (2m+h-1)!} = J(t; j).$$

Nous obtenons alors le développement

$$(48) \quad \Psi_{\mu\nu}(\zeta; lm) = e^{\frac{2\pi i(l+\lambda_\nu)}{r(\zeta-p)}} \frac{A_{\mu\nu}^{(0)}}{r^{2m}(\zeta-p)^{2m}} + \sum_j \sum_{t=0}^{t=\infty} \frac{e^{\frac{2\pi i(l+\lambda_\nu)}{r(p s_j^{-1}-p)}}}{r^{2m}(\zeta-p)^{2m} (\alpha_j - p s_j^{-1})^{2m} (p - p s_j^{-1})^{2m}} J(t; j) A_{\mu\nu}^{(j)}.$$

Si nous introduisons ces développements dans (47), si nous rendons égaux les coefficients de $e^{\frac{2\pi i(l+\lambda_\mu)}{r(\zeta-p)}} (t=0, 1, 2 \dots p-1)$ nous obtenons un système d'équations d'après lequel nous pouvons calculer les constantes k_ν .

§ 17. Les séries

$$Z_{\mu\nu}(\zeta) = \sum_i \frac{A_{\mu\nu}^{(i)}}{(\zeta_{i_1} - a)^{2m} (\gamma_{i_1} \zeta + \delta_{i_1})^{2m}}$$

peuvent s'exprimer comme des combinaisons linéaires des séries

$$\Psi_{\mu\nu_1}(t) \quad (\nu_1 = 1, 2 \dots n) \quad (t = 0, 1, 2 \dots \frac{\rho + r}{n} - 1)$$

dont les coefficients sont des fonctions de a

Ecrivons

$$(49) \quad Z_{\mu\nu}(\zeta, a) = \sum_{\nu_1=1}^{\nu_1=n} \left[f_{\nu_1 0}^{(\nu)}(a) \Psi_{\mu\nu_1}(0) + \dots + f_{\nu_1 \frac{\rho}{n}-2}^{(\nu)}(a) \Psi_{\mu\nu_1}\left(\frac{\rho+r}{n} - 2\right) \right] + \\ + \sum_{\nu_1=1}^{\nu_1=n-r} f_{\nu_1 \frac{\rho}{n}-1}^{(\nu)}(a) \Psi_{\mu\nu_1}\left(\frac{\rho+r}{n} - 1\right)$$

Mais $Z_{\mu\nu}(\zeta, a)$, considéré comme fonction de a , est une série zétafuchsienne appartenant au groupe réciproque à G .

Soit T_i une substitution de ce groupe et t_i une substitution correspondante du groupe fuchsien.

Nous avons donc

$$Z_{\mu\nu}(\zeta; at_i) = \sum_{\nu_1=1}^{\nu_1=n} \sum_{s=0}^{\frac{\rho+r}{n}-2} f_{\nu_1 s}^{(\nu)}(at_i) \Psi_{\mu\nu_1}(s) + \sum_{\nu_1=1}^{\nu_1=n-r} f_{\nu_1 s}^{(\nu)}(at_i) \Psi_{\mu\nu_1}\left(\frac{\rho+r}{n} - 1\right); \\ (Z_{\mu\nu}(\zeta; a)) T_i = \sum_{\nu_1=1}^{\nu_1=n} \sum_{s=0}^{\frac{\rho+r}{n}-2} (f_{\nu_1 s}^{(\nu)}(a)) T_i \Psi_{\mu\nu_1}(s) + \sum_{\nu_1=1}^{\nu_1=n-r} (f_{\nu_1 s}^{(\nu)}(a)) T_i \Psi_{\mu\nu_1}\left(\frac{\rho+r}{n} - 1\right)$$

Mais par suite de l'égalité

$$Z_{\mu\nu}(\zeta; at_i) = (Z_{\mu\nu}(\zeta; a)) T_i \cdot \left(\frac{dat_i}{da}\right)^{-m}$$

$$0 = \sum_{\nu_1=1}^{\nu_1=n} \sum_{s=0}^{\frac{\rho+r}{n}-2} \left[(f_{\nu_1 s}^{(\nu)}(at_i)) T_i \cdot \left(\frac{dat_i}{da}\right)^{-m} - f_{\nu_1 s}^{(\nu)}(at_i) \right] \Psi_{\mu\nu_1}(s) + \\ + \sum_{\nu_1=1}^{\nu_1=n-r} \left[(f_{\nu_1 s}^{(\nu)}(a)) T_i \cdot \left(\frac{dat_i}{da}\right)^{-m} - f_{\nu_1 s}^{(\nu)}(at_i) \right] \Psi_{\mu\nu_1}\left(\frac{\rho+r}{n} - 1\right).$$

Mais les fonctions $\Psi_{\mu\nu}(t)$ sont des fonctions linéairement indépendantes.

Nous en tirons

$$\left(\frac{dat_i}{da}\right)^{-m} \cdot f_{\nu_1 s}^{(\nu)}(a) T_i = f_{\nu_1 s}^{(\nu)}(at_i).$$

Ainsi les fonctions $f_{\nu_1 s}^{(\nu)}(a)$ sont des séries zétafuchsiennes appartenant au groupe réciproque à G .

Si nous posons maintenant

$$\Phi_{\mu\nu}(a; -tm) = \sum_i \frac{a_{\mu\nu}^{(i)} e^{-\frac{2\pi i(\lambda_\nu + t)}{r(as_i - p)}}}{(as_i - p)^{2m} (r_i a + \delta_i)^{2m}}$$

nous avons un système de ces séries linéairement indépendantes si nous posons

$$\mu = 1, 2 \dots n; t = 0, 1, \dots \frac{\rho_1 + r_1}{n} - 2; \mu = 1, 2 \dots n - r_1 \text{ si } t = \frac{\rho_1 + r_1}{n} - 1.$$

Nous pouvons donc écrire

$$(50) \quad f_{\nu_1 s}^{(\nu)}(a) = \sum_{t=0}^{t=\frac{\rho_1+r_1}{n}-2} \sum_{\mu_1=1}^{\mu_1=n} c_{\nu_1 s}^{\mu_1 t} \Phi_{\mu_1 \nu}(a; -tm) + \\ + \sum_{\mu_1=1}^{\mu_1=n-r_1} c_{\nu_1 s}^{\mu_1, \frac{\rho_1+r_1}{n}-1} \Phi_{\mu_1 \nu}(a; -\left(\frac{\rho_1+r_1}{n}-1\right)m).$$

Pour déterminer les coefficients $c_{\nu_1 s}^{\mu_1 t}$ développons les deux membres de (49) par rapport à

$$\frac{1}{r^{2m}(\xi - p)^{2m}} e^{\frac{2\pi i(\lambda_\mu + t)}{r(\xi - p)}}$$

Le coefficient du membre gauche est d'après (32)

$$\frac{(2\pi i)^{2m} (t + \lambda_\mu)^{m-1}}{(2m-1)!} \Phi_{\mu\nu}(a; -tm);$$

le coefficient de $\Phi_{\mu\nu}(l)$, que nous obtenons d'après (48) nous désignons

$$\frac{(2\pi i)^{2m}}{(2m-1)!} (t + \lambda_\mu)^{2m-1} C_{\mu\nu}^{(t)}(l).$$

Nous obtenons donc

$$\Phi_{\mu\nu}(a_i; -tm) = \sum_{\nu_1=1}^n \left[f_{\nu_1 0}^{(\nu)}(a) \cdot C_{\mu\nu_1}^{(\ell)}(0) + \dots + f_{\nu_1 \frac{\rho+r}{n}-2}^{(\nu)}(a) C_{\mu\nu_1}^{(\ell)}\left(\frac{\rho+r}{n}-2\right) \right] + \\ + \sum_{\nu_1=1}^{\nu_1=n-r} f_{\nu_1 \frac{\rho+r}{n}-1}^{(\nu)}(a) C_{\mu\nu_1}^{(\ell)}\left(\frac{\rho+r}{n}-1\right).$$

Si nous nous servons maintenant de (50) et si nous remarquons que $\Phi_{\mu\nu}(a_i; -tm)$ sont des fonctions linéairement indépendantes, nous obtenons

$$1 = \sum_{\nu_1=1}^n \left[c_{\nu_1 0}^{\mu t} C_{\mu\nu_1}^{(\ell)}(0) + \dots + c_{\nu_1 \frac{\rho+r}{n}-2}^{\mu t} C_{\mu\nu_1}^{(\ell)}\left(\frac{\rho+r}{n}-2\right) \right] + \\ + \sum_{\nu_1=1}^{\nu_1=n-r} c_{\nu_1 \frac{\rho+r}{n}-1}^{\mu t} C_{\mu\nu_1}^{(\ell)}\left(\frac{\rho+r}{n}-1\right) \\ (51) \quad 0 = \sum_{\nu_1=1}^n \left[c_{\nu_1 0}^{\mu_1 t_1} C_{\mu\nu_1}^{(\ell)}(0) + \dots + c_{\nu_1 \frac{\rho+r}{n}-2}^{\mu_1 t_1} C_{\mu\nu_1}^{(\ell)}\left(\frac{\rho+r}{n}-2\right) \right] + \\ + \sum_{\nu_1=1}^{\nu_1=n-r} c_{\nu_1 \frac{\rho+r}{n}-1}^{\mu_1 t_1} C_{\mu\nu_1}^{(\ell)}\left(\frac{\rho+r}{n}-1\right) \\ \mu_1 \neq \mu; \quad t_1 \neq t;$$

Si nous donnons maintenant à μ les valeurs $1, 2 \dots n$ et à t les valeurs $0, 1 \dots \frac{\rho_1}{n} - 1$ nous obtenons ρ_1^2 équations d'après lesquelles nous pouvons calculer les $\rho\rho_1$ constantes $c_{\nu s}^{\mu t}$ si $\rho_1 > \rho$. Si ce n'est pas le cas mais si $\rho > \rho_1$, on peut développer les deux membres par rapport à $e^{\frac{-2\pi i(\lambda_\nu + l)}{r(as_i - p)}}$ et nous obtenons ρ^2 équations. Nous pouvons donc considérer les constantes $c_{\nu s}^{\mu t}$ comme déterminées.

Mais il ne faut pas nous limiter à ce cas spécial des séries zétafuchsiennes.

Si

$$Z_{\mu\nu}(\zeta a) = \sum_{i_1} \frac{A_{\mu\nu}^{(i_1)}}{(\zeta s_{i_1} - a)(\gamma_{i_1} \zeta + \delta_{i_1})^{2m}}$$

$Z_{\mu\nu}(\zeta, a)$, considéré comme une fonction de a , n'est plus une série zétafuchsiennne mais se comporte comme l'indique la relation suivante.

$$\left(\frac{dat_i}{da}\right)^{-(2m-2)} Z_{\mu\nu}(\zeta; at_i) = (Z_{\mu\nu}(\zeta; a)) T_i + P_{2m-2}(a)$$

où T_i est une substitution du groupe réciproque à G et où $P_{2m-2}(a)$ est un polynome du degré $2m-2$ par rapport à a .

Je n'en fais pas ici la démonstration mais je me réfère à la démonstration analogue que Poincaré a donnée pour les séries thétafuchsiennes dans son mémoire *Sur les Invariants Arithmétiques* *.

On peut avec les méthodes employées précédemment obtenir des séries analogues à $\Phi_{\mu\nu}(a; -tm)$. Nous les désignons par $\chi_{\mu\nu}(a; -tm)$.

On trouve

$$\chi_{\mu\nu}(a; -tm) = \sum_i \sum_{t=0}^{t=\infty} \frac{a_{\mu\nu}^{(i)}}{i^{2m}(\zeta - p)^{2m}(\gamma_i a + \delta_i)(as_i - p)(-\gamma_i p + \alpha_i)^{2m-1}} \cdot \left[e^{-\frac{2\pi i(\lambda_\mu + t)}{r(as_i - p)}} \cdot (\gamma_i a + \delta_i)^{2m-1} (\alpha_i - p\gamma_i)^{2m-1} (as_i - p)^{2m-1} - \right. \\ \left. - e^{-\frac{2\pi i(\lambda_\mu + t)}{r(\frac{\alpha_i}{\gamma_i} - p)}} \sum_{s=0}^{s=2m-1} (-1)^s \frac{(2\pi i)^s (\lambda_\mu + t)^s (\gamma_i a + \delta_i)^{2m-1-s} (\alpha_i - p\gamma_i)^{2m-1-s} (as_i - p)^{2m-1-s}}{s!} \right]$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d^{2m-1} \chi_{\mu\nu}(a; -tm)}{da^{2m-1}} = k \Phi_{\mu\nu}(a; -tm).$$

On a donc à changer dans (50) $\Phi_{\mu\nu}$ en $\chi_{\mu\nu}$; (49) s'applique toujours si l'on multiple le membre de droite par une constante facile à déterminer.

Il en est de même si l'on a

$$Z_{\mu\nu}(\zeta, a) = \sum_{i_1} \frac{A_{\mu\nu}^{(i_1)}}{(\zeta s_{i_1} - a)^s (\gamma_{i_1} \zeta + \delta_{i_1})^{2m}}.$$

On a alors à introduire, à la place de $\chi_{\mu\nu}$, $\frac{d^{s-1} Z_{\mu\nu}}{da^{s-1}}$.

Par ce moyen nous sommes en mesure de poser une série zétafuchsienne générale, sous la forme (49).

§ 18. La possibilité que les séries zétafuchsiennes disparaissent identiquement nous a souvent plus haut causé des difficultés. Je veux dire quelques mots au sujet de la condition nécessaire et suffisante pour une disparition identique. Je me sers pour cela de la relation (49). Si $Z_{\mu\nu}(\zeta; a)$ disparaît, puisque $\psi_{\mu\nu}^{(s)}$ sont des fonctions linéairement indépendantes, $f_{\nu_1 s}^{(\nu)}(a)$ ($s=0, 1 \dots \frac{\rho+r}{n} - 2$) ($\nu_1 = 1, 2 \dots n$) et $(s = \frac{\rho+r}{n} - 1)$ ($\nu_1 = 1, 2 \dots n - r$) doit être égal à 0.

* Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd 129, p. 89-150.

Dans l'expression (50) de ces fonctions nous avons donc à remplacer $\Phi_{\mu\nu}(a; -tm)$ par une combinaison linéaire des $\chi_{\mu\nu}(a_k)$ et leurs dérivées. a_k sont les pôles de $H_\nu(\zeta)$. Appelons cette combinaison linéaire $K_{\mu\nu}(t)$.

Nous pouvons donc formuler notre condition ainsi

$$\sum_{\mu_1} \sum_t c_{\nu_1 s}^{\mu_1 t} K_{\mu_1 \nu_1}(t) = 0;$$

Multiplions cette équation par $C_{\mu_2 \nu_1}^{t_1}(s)$, et sommons par rapport à ν_1 et à s . Nous obtenons

$$\sum_{\nu_1} \sum_s C_{\nu_2 \nu_1}^{t_1}(s) \sum_{\mu_1} \sum_t c_{\nu_1 s}^{\mu_1 t} K_{\mu_1 \nu_1}(t) = \sum_{\mu_1} \sum_t K_{\mu_1 \nu_1}(t) \sum_{\nu_1} \sum_s c_{\nu_1 s}^{\mu_1 t} C_{\mu_2 \nu_1}^{t_1}(s) = 0$$

Rappelons nous les relations (51) et nous trouverons

$$\sum_{\mu_1} \sum_t K_{\mu_1 \nu_1}(t) \sum_{\nu_1} \sum_s c_{\nu_1 s}^{\mu_1 t} C_{\mu_2 \nu_1}^{t_1}(s) = K_{\mu_2 \nu_1}(t) = 0$$

La condition suffisante et nécessaire pour une disparition identique est donc que

$$(52) \quad K_{\mu\nu}(t) = 0 \quad \mu = 1, 2 \dots n,$$

lorsque $t = 0, 1 \dots \frac{\rho + r}{n} - 2$ et $\mu = 1, 2 \dots n - r$, lorsque $t = \frac{\rho + r}{n} - 1$.

La condition ainsi formulée n'a cependant qu'un intérêt théorique car dans la pratique il est facile de s'apercevoir quand les séries disparaissent identiquement.

Comme exemple je veux montrer que

$$\sum_n \frac{A_{\mu\nu}^{(i)}}{(\zeta_{s_{i_1}} - \varepsilon')^{2m} (\gamma_{i_1} \zeta + \delta_{i_1})^{2m}}$$

disparaît identiquement en général, lorsque ε' est un sommet elliptique à l'extérieur du cercle de l'unité.

Nous avons donc à montrer que $\Phi_{\mu\nu}(\varepsilon'; -tm) = 0$.

Mais un sommet elliptique est en général un zéro d'une série zétafuchsienne. La série ci-dessus disparaît donc en général identiquement.

§ 19. Nous avons dans ce qui précède admis que les racines de l'équation fondamentale de la substitution S étaient simples. Nous supposons maintenant des racines multiples et pour plus de simplicité nous admettons qu'il y a seulement une racine multiple.

S^{-t} peut donc s'écrire conformément au schéma (33).

Posons maintenant

$$S_i = S_i S^t(t = -\infty \dots +\infty)$$

La substitution S_i^{-1} prend alors la forme suivante:

$$\begin{aligned} Z_{\mu}^{(i)} &= w_1^t Z_1 \left(A_{\mu 1}^{(i)} - t A_{\mu 2}^{(i)} + \binom{t}{2} A_{\mu 3}^{(i)} + \dots + (-1)^{q-1} \binom{t}{q} A_{\mu q}^{(i)} \right) + w_1^t Z_2 \left(A_{\mu 2}^{(i)} - \right. \\ &\quad \left. - \binom{t}{1} A_{\mu 3}^{(i)} + \dots + (-1)^{q-2} \binom{t}{q-1} A_{\mu q}^{(i)} \right) + \dots + w_1^t Z_q A_{\mu q}^{(i)}; \\ w &= e^{-2\pi i \lambda} \end{aligned}$$

Ecrivons donc

$$\begin{aligned} Z_{\mu \nu}(\zeta a) &= \sum_{i_1} \frac{A_{\mu \nu}^{(i_1)}}{(\zeta_{i_1} - a)^{2m} (\gamma_{i_1} \zeta + \delta_{i_1})^{2m}} = \\ &= \sum_i \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{w^t \left(A_{\mu \nu}^{(i)} - t A_{\mu, \nu+1}^{(i)} + \dots + (-1)^{q-\nu} A_{\mu q}^{(i)} \binom{t}{q-\nu+1} \right)}{r^{2m} (p-a)^{2m} (\zeta_i - p)^{2m} (\gamma_i \zeta + \delta_i)^{2m} \left(t + \frac{1}{r(\zeta_i - p)} - \frac{1}{r(a-p)} \right)^{2m}} \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{w^t}{(t + z_i - b)^{2m}} &= \frac{2\pi i}{(2m-1)!} \sum_{t=0}^{t=\infty} (2\pi i)^{2m-1} (\lambda + t)^{2m-1} e^{2\pi i(z_i-b)(\lambda+t)} = \\ &= \sum_{t=0}^{t=\infty} e^{2\pi i(z_i-b)(\lambda+t)} Y_{2m-1}^{(t)}; \end{aligned}$$

où

$$z_i = \frac{1}{r(\zeta_i - p)} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{r(a-p)}$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{w^t \binom{t}{\rho}}{(t + z_i - b)^{2m}} &= \frac{(-1)^\rho}{\rho!} \left[\sum_{t=0}^{t=\infty} e^{2\pi i(z_i-b)(\lambda+t)} Y_{2m-\rho-1}^{(t)} + \right. \\ &\quad + \sum_{t=0}^{t=\infty} \sum_{s=0}^{s=\rho-1} (z_i - b + s) e^{2\pi i(z_i-b)(\lambda+t)} Y_{2m-1}^{(t)} + \\ &\quad + \sum_{t=0}^{t=\infty} e^{2\pi i(z_i-b)(\lambda+t)} Y_{2m-\rho+1}^{(t)} \prod_{s=0}^{s=\rho-1} (z_i - b + s) + \dots + \\ &\quad \left. + (z_i - b) \dots (z_i - b + \rho - 1) \sum_{t=0}^{t=\infty} e^{2\pi i(z_i-b)(\lambda+t)} Y_{2m-1}^{(t)} \right]; \end{aligned}$$

Si nous nous servons de ces relations nous trouvons

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} w^t \left(A_{\mu\nu}^{(i)} - t A_{\mu; \nu+1}^{(i)} + \dots + (-1)^{q-\nu} A_{\mu q}^{(i)} \binom{t}{q-\nu+1} \right) \\
 &= \sum_{t=0}^{t=\infty} e^{2\pi i(z_i-b)(\lambda+t)} \left(A_{\mu\nu}^{(i)} + z_i A_{\mu; \nu+1}^{(i)} + \dots + \frac{z_i(z_i+1)\dots(z_i+q-\nu-1)}{(q-\nu)!} A_{\mu q}^{(i)} \right) Y_{2m-1}^{(t)} + \\
 &+ \sum_{t=0}^{t=\infty} e^{2\pi i(z_i-b)(\lambda+t)} \left(A_{\mu; \nu+1}^{(i)} + z_i A_{\mu; \nu+2}^{(i)} + \dots + \frac{z_i(z_i+1)\dots(z_i+q-\nu-2)}{(q-\nu-1)!} A_{\mu q}^{(i)} \right) (Y_{2m-2}^{(t)} - \\
 &- b Y_{2m-1}^{(t)}) + \sum_{t=0}^{t=\infty} e^{2\pi i(z_i-b)(\lambda+t)} \frac{1}{2!} \left(A_{\mu; \nu+2}^{(i)} + \dots + \right. \\
 &+ \frac{z_i(z_i+1)\dots(z_i+q-\nu-3)}{(q-\nu-2)!} A_{\mu q}^{(i)} \left(Y_{2m-3}^{(t)} - \frac{d(b(b-1))}{db} Y_{2m-2}^{(t)} + b(b-1) Y_{2m-1}^{(t)} \right) + \\
 &+ \dots + A_{\mu q}^{(i)} \frac{e^{2\pi i(z_i-b)(\lambda+t)}}{(q-\nu)!} \left(Y_{2m-q+\nu-1}^{(t)} - \right. \\
 &- \frac{1}{(q-\nu-1)!} \frac{d^{q-\nu-1}(b(b-1)\dots(b-q+\nu+1))}{db^{q-\nu-1}} Y_{2m-q+\nu}^{(t)} + \dots + \\
 &+ b(b-1)\dots(b-q+\nu+1) Y_{2m-1}^{(t)} \left. \right).
 \end{aligned}$$

Posons maintenant

$$(34_1) \quad \sum_i \frac{\left(A_{\mu\nu}^{(i)} + z_i A_{\mu; \nu+1}^{(i)} + \dots + \frac{z_i \dots (z_i+q-\nu-1)}{(q-\nu)!} A_{\mu q}^{(i)} \right) e^{2\pi i(\lambda+t)z_i}}{(z_i - p^{2m}(\gamma_i \zeta + \delta_i))^{2m}} = \psi_{\mu\nu}(\zeta; tm)$$

et nous avons alors

$$\begin{aligned}
 (35_1) \quad Z_{\mu\nu}(\zeta; a) &= \frac{1}{r^{2m}(a-p)^{2m}} \sum_{t=0}^{t=\infty} e^{-2\pi i h(\lambda+t)} \left[\Psi_{\mu\nu}(t) Y_{2m-1}^{(t)} - \Psi_{\mu; \nu+1}(t) (Y_{2m-2}^{(t)} - b Y_{2m-1}^{(t)}) + \right. \\
 &+ \Psi_{\mu q}(t) \frac{1}{(q-\nu)!} (Y_{2m-q+\nu-1}^{(t)} - \dots + (-1)^{q+\nu} b(b-1)\dots(b-q+\nu-1) Y_{2m-1}^{(t)}) \left. \right];
 \end{aligned}$$

$\Psi_{\mu\rho}(\zeta; tm)$ sont toujours des séries zétafuchsienues appartenant au groupe G .
 Pour trouver des relations entre $\Psi_{\mu\rho}(t)$ nous devons procéder comme dans § 15.

Pour plus de clarté limitons-nous dans ce qui suit à $n = 3$, $Z_\mu(x)$ doivent remplir les mêmes conditions que dans § 15 et doivent en outre être telles que

$$Z_1(x) = \varphi_1(x); \quad Z_2(x) = \varphi_2(x) - \frac{\log x}{2\pi i} \varphi_1(x); \quad Z_3(x) = \varphi_3(x) - \frac{\log x}{2\pi i} \varphi_2(x) - \\ - \frac{\log x}{2\pi i} \left(-\frac{\log x}{2\pi i} + 1 \right) \frac{\varphi_1(x)}{2!}.$$

Si nous nous servons des relations (37) nous pouvons écrire

$$(41_1) \quad \sum_i \sum_{k=1}^{k=q} \frac{1}{r(p-a'_k)} \sum_{t=0}^{l=\infty} e^{-2\pi i b'_k(\lambda+t)} \left[C_{k1} \left\{ Y_{2m-1}^{(t)} \Psi_{\mu 1}(t) + \Psi_{\mu 2}(t) (Y_{2m-2}^{(t)} - b'_k Y_{2m-1}^{(t)}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \Psi_{\mu 2}(t) (Y_{2m-3}^{(t)} - \frac{d(b'_k)b'_k - 1}{b'_k} Y_{2m-2}^{(t)} + b'_k(b'_k - 1) Y_{2m-1}^{(t)}) \right\} + C_{k2} \left\{ \Psi_{\mu 2}(t) Y_{2m-1}^{(t)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \Psi_{\mu 3}(t) (Y_{2m-2}^{(t)} - b'_k Y_{2m-1}^{(t)}) \right\} + C_{k3} \Psi_{\mu 3}(t) Y_{2m-1}^{(t)} \right] = 0.$$

Si par suite des hypothèses nous posons

$$C_{k2} = C'_{k2} + \frac{\log \bar{c}_k}{2\pi i} C_{k1}; \quad C_{k3} = C'_{k3} + C'_{k2} \frac{\log \bar{c}_k}{2\pi i} + \frac{C'_{k1}}{2!} \frac{\log \bar{c}_k}{2\pi i} \left(\frac{\log \bar{c}_k}{2\pi i} + 1 \right)$$

nous pouvons écrire l'expression qui suit le signe de sommation de la manière suivante:

$$C'_{k1} \left[Y_{2m-1}^{(t)} \Psi_{\mu 1}(t) + Y_{2m-1}^{(t)} \Psi_{\mu 2}(t) + \frac{\Psi_{\mu 3}(t)}{2!} Y_{2m-3}^{(t)} + \frac{\Psi_{\mu 3}(t)}{2!} Y_{2m-2}^{(t)} \right] + C'_{k2} \left[\Psi_{\mu 2}(t) Y_{2m-1}^{(t)} + \right. \\ \left. + \Psi_{\mu 3}(t) Y_{2m-2}^{(t)} \right] + \frac{C'_{k3}}{2!} \Psi_{\mu 3}(t) Y_{2m-1}^{(t)} + C'_{k1} \left(\frac{\log \bar{c}_k}{2\pi i} - b'_k \right) \left[\Psi_{\mu 2}(t) Y_{2m-1}^{(t)} + \Psi_{\mu 3}(t) Y_{2m-2}^{(t)} + \right. \\ \left. + \frac{\Psi_{\mu 3}(t)}{2!} Y_{2m-1}^{(t)} \right] + C'_{k2} \left(\frac{\log \bar{c}_k}{2\pi i} - b'_k \right) \Psi_{\mu 3}(t) Y_{2m-1}^{(t)} + C'_{k1} \left(\frac{\log \bar{c}_k}{2\pi i} - b'_k \right)^2 \Psi_{\mu 3}(t) Y_{2m-1}^{(t)}.$$

Par suite de la relation (42) nous obtenons

$$b'_k = \frac{\log \bar{c}_k}{2\pi i} + a_0 + a_1 \frac{1}{\bar{c}_k} + \dots$$

Si nous posons

$$\bar{\varphi}_1(x) = \frac{1}{\bar{c}_k^{\lambda_1}} (\bar{a}_{01} \bar{c}_k^s + \bar{a}_{11} \bar{c}_k^{s-1} + \dots)$$

nous avons aussi

$$\bar{\varphi}_2(x) = \frac{1}{\bar{c}_k^{\lambda_1}} (\bar{a}_{02} \bar{c}_k^s + \bar{a}_{12} \bar{c}_k^{s-1} + \dots)$$

$$\bar{\varphi}_3(x) = \frac{1}{\bar{c}_k^{\lambda_1}} (\bar{a}_{03} \bar{c}_k^s + \bar{a}_{13} \bar{c}_k^{s-1} + \dots).$$

Tout ce que nous avons dit au § 15 peut s'appliquer au cas dont il s'agit ici. Parmi les fonctions $\Psi_{\mu\nu}(\zeta; tm)$ nous pouvons alors choisir un système de séries zétafuchsiennes entières linéairement indépendantes avec la même valeur de t que dans le § 15. Les autres fonctions s'expriment linéairement à l'aide de celles là. Les coefficients sont trouvés par des développements analogues à du § 16. La condition pour la disparition identique des séries de Poincaré peut être obtenue d'une manière analogue à celle du § 18. Je n'en fais pas la démonstration car il n'y faudrait que quelques modifications sans importance et le résultat est analogue. Au lieu de la fonction qui a été introduite là nous avons à poser ici

$$\Psi_{\mu\nu}(a; -tm) =$$

$$= \sum_i e^{-2\pi i \frac{\lambda + t}{r(as_i - p)}} \left[a_{\mu\nu}^{(i)} - b_i a_{\mu; \nu+1}^{(i)} + \frac{b_i(b_i-1)}{2!} a_{\mu; \nu+2}^{(i)} + \dots + \frac{(-1)^{n-\nu} b_i(b_i-1) \dots (b_i-n+\nu+1) a_{\mu n}^{(i)}}{(n-\nu)!} \right]$$

$$\text{où} \quad \frac{1}{b_i} = \frac{1}{r(as_i - p)}.$$

§ 20. Dans la première partie de ce chapitre nous avons choisi une substitution du groupe fuchsien g et dans ce groupe nous avons rangé les substitutions de telle manière que $s_i = s_i s^t$ ($t = -\infty \dots +\infty$), où nous avons admis que s avait un caractère parabolique. Par une sommation par rapport à t et par une transformation nous avons obtenu de nouvelles séries qui peuvent être plus convenables pour certains résultats que les séries originelles. Nous allons montrer maintenant quelle devrait être l'opération, si nous choisissons s de telle manière qu'il ait un caractère elliptique.

On peut alors l'écrire :

$$\frac{\zeta' - p}{\zeta' - p_1} = K \frac{\zeta - p}{\zeta - p_1}; \quad K = e^{\frac{2\pi i}{l}}$$

qui peut aussi s'écrire

$$\zeta_1 = \frac{\zeta \frac{p - Kp_1}{\sqrt{K}(p - p_1)} + \frac{pp_1(K-1)}{\sqrt{K}(p - p_1)}}{\zeta \frac{1-K}{\sqrt{K}(p - p_1)} + \frac{Kp - p_1}{(p - p_1)\sqrt{K}}}$$

Soit une substitution S du groupe zétafuchsien G correspondant à s du groupe g . Par une transformation nous faisons en sorte que cette substitution devienne de forme canonique c'est à dire qu'elle puisse s'écrire

$$Z_{\nu}' = m_{\nu} Z_{\nu}; \quad m_{\nu} = e^{2\pi i \frac{l_{\nu}}{l}} \quad 0 \leq l_{\nu} < l.$$

Rangeons les substitutions du groupe g de telle sorte que

$$s_{i_1} = s_i s^t \quad (t = 0, 1 \dots l-1).$$

Les coefficients de la substitution $S_{i_1}^{-1} = S^{-t} S_i^{-1}$ peuvent alors s'écrire

$$A_{\mu, \nu}^{i_1} = A_{\mu, \nu}^{(i)} m_{\nu}^{-t}.$$

Formons maintenant

$$\begin{aligned} Z_{\mu, \nu}(\zeta) &= \sum_{i_1} \frac{A_{\mu, \nu}^{i_1}}{(\zeta_{i_1} - a)^{2m} (\gamma_{i_1} \zeta + \delta_{i_1})^{2m}} = \\ &= \sum_i \sum_{t=0}^{l-1} \frac{A_{\mu, \nu}^{(i)} m_{\nu}^{-t} K^{tm} (p - p_1)^{2m}}{(a - p)^{2m} (\zeta_i - p_1)^{2m} (\gamma_i \zeta + \delta_i)^{2m} \left(K^{\frac{t(a - p_1)(\zeta_i - p)}{(a - p)(\zeta_i - p_1)} - 1} \right)^{2m}} \end{aligned}$$

Posons

$$\frac{a - p_1}{a - p} \cdot \frac{\zeta_i - p}{\zeta_i - p_1} = z_i.$$

Si p est un sommet qui se trouve à l'intérieur du cercle de l'unité, on a évidemment $|z_i| < 1$

$$m_{\nu}^{-1} = e^{-2\pi i \frac{l_{\nu}}{l}} = K^{-l_{\nu}}.$$

On a donc

$$\frac{K^{(m-l_{\nu})t}}{(1 - K^t z_i)^{2m}} = \frac{1}{(2m-1)!} \left[K^{(m-l_{\nu})t} + \frac{2m!}{1!} K^{t(m-l_{\nu}+1)} z_i + \frac{(2m+1)!}{2!} K^{t(m-l_{\nu}+2)} z_i^2 + \dots \right].$$

Posons maintenant $m - l_{\nu} \equiv \sigma \pmod{l}$ $\sigma < l$ et observons que $\sum_{t=0}^{l-1} K^{sn} = 0$ pourvu

que l'on n'ait pas $s \equiv 0 \pmod{l}$ où nous obtenons au contraire $\sum_{t=0}^{l-1} K^{sn} = l$.

Posons donc

$$\Psi_{\mu, \nu}(t) = \sum_i \frac{A_{\mu, \nu}^{(i)} \left(\frac{\zeta_i - p}{\zeta_i - p_1} \right)^{l \left(\frac{l-\sigma}{l} + t \right)}}{\zeta_i - p_1)^{2m} (\gamma_i \zeta + \delta_i)^{2m}}$$

et nous obtenons le développement suivant

$$(53) \quad Z_{\mu, \nu}(\zeta) = \frac{(p - p_1)^{2m}}{(a - p)^{2m}} \frac{l}{(2m-1)!} \sum_{t=0}^{l-\sigma} \frac{(2m-1-l-\sigma+lt)!}{(l-\sigma+lt)!} \left(\frac{a - p_1}{a - p} \right)^{l \left(\frac{l-\sigma}{l} + t \right)} \Psi_{\mu, \nu}(t)$$

Comme précédemment nous voyons maintenant comment toutes les fonctions $\Psi_{\mu\nu}(t)$ et par suite toutes les séries entières zétafuchsiennes peuvent s'exprimer linéairement par

$$\Psi_{\mu\nu}(t); \quad \nu = 1, 2 \dots n \quad \text{pour} \quad t = 0, 1 \dots \frac{\rho + r}{n} - 2$$

$$\text{et} \quad \nu = 1, 2 \dots n - r \quad \text{pour} \quad t = \frac{\rho + r}{n} - 1.$$

Posons toujours

$$\Lambda_{\mu} = \left(\frac{d\zeta}{dx} \right)^{m-1} \frac{Z_{\mu}(x)}{(x - c_1) \dots (x - c_k)}$$

et faisons la même hypothèse que dans le § 15. Rappelons-nous la relation (38) que, par suite de (53), nous pouvons écrire

$$0 = \sum_k \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \sum_{t=0}^{t=\infty} C_{k\nu} \frac{(2m-1+l-\sigma+lt)!}{(l-\sigma+lt)!} \left(\frac{a'_k - p_1}{a'_k - p} \right)^l \left(\frac{\bar{p}_1 - \bar{z}_1}{\bar{p} - \bar{z}_1} \right)^l \frac{1}{(a'_k - p)^{2m}} \Psi_{\mu\nu}(t)$$

Ici nous pouvons s'écrire

$$\frac{1}{x} = \sum_{t=1}^{t=\infty} \nu_t' \left(\frac{\zeta - p}{\zeta - p_1} \right)^t = \sum_{t=1}^{t=\infty} \nu_t' \left(\frac{p}{p_1} \right)^t \left(\frac{\bar{p}_1 - \bar{z}_1}{\bar{p} - \bar{z}_1} \right)^t$$

Par suite

$$\frac{1}{c_k} = \sum_{t=1}^{t=\infty} \nu_t' \left(\frac{p}{p_1} \right)^t \left(\frac{\bar{p}_1 - \bar{a}'_k}{\bar{p} - \bar{a}'_k} \right)^t$$

ou si nous changeons i en $-i$

$$\frac{1}{\bar{c}_k} = \sum_{t=1}^{t=\infty} \nu_t' \left(\frac{a'_k - p_1}{a'_k - p} \right)^t$$

Par différentiation nous obtenons

$$\frac{1}{x^2} \frac{dx}{d\bar{z}_1} = \frac{1}{(\bar{z}_1 - \bar{p})^2} \sum_{t=0}^{t=\infty} \nu_t'' \left(\frac{\bar{z}_1 - p_1}{\bar{z}_1 - \bar{p}} \right)^{t-1}$$

et de cette relation nous tirons

$$\frac{da'_k}{d\bar{c}_k} = (a'_k - p)^2 \sum_{t=1}^{t=\infty} \nu_t'' \left(\frac{a'_k - p_1}{a'_k - p} \right)^{t-1}$$

On a aussi

$$\overline{Z_{\nu}(c_k)} = \frac{1}{\bar{c}_k^{\lambda_{\nu}}} (a_{0\nu} \bar{c}_k^{\lambda_{\nu}} + a_{1\nu} \bar{c}_k^{\lambda_{\nu}-1} + \dots); \quad \lambda_{\nu} + \lambda'_{\nu} = 1$$

$$\left(\frac{a'_k - p_1}{a'_k - p}\right)^l \left(\frac{l-\sigma}{l} + t\right)^{\frac{l-\sigma}{l}} = \left(\frac{1}{\bar{c}_k}\right)^{\frac{l-\sigma}{l}} \left(a_0^{(t)} \frac{1}{\bar{c}_k} + a_1^{(t)} \frac{1}{\bar{c}_k^{l+1}} + \dots\right).$$

Nous trouvons donc

$$\left(\frac{a'_k - p_1}{a'_k - p}\right)^l \frac{1}{(a'_k - p)^{2m}} \left(\frac{da'_k}{d\bar{c}_k}\right)^m \overline{Z_\nu(c_k)} = \sum \delta_{j\nu} \bar{c}_k^{-j}$$

$$j \geq \frac{l-\sigma}{l} + m\left(1 + \frac{1}{l}\right) + \lambda'_\nu - s.$$

Si nous posons $m = kl + a$; alors $\sigma = a - l_\nu$ si $a > l_\nu$, ce que nous admettons. Nous trouvons donc

$$j \geq 2 + kl + a + k - s.$$

Mais si Λ_μ doit être fini partout sauf dans les pôles prescrits il faut que

$$s \leq (m-1) \left(1 + \frac{1}{l}\right) + \lambda'_\nu + q.$$

$$\text{D'où } kl + a + k - s \geq \frac{l_\nu + 1 - a}{l} - q.$$

Par suite

$$j \geq 2 - q + \frac{l_\nu + 1 - a}{l}; \text{ c'est à dire que } j \geq 2 - q.$$

Si nous admettons que $a < l_\nu$ nous trouvons aussi, par un calcul analogue, $j \geq 2 - q$.

Nous n'avons plus qu'à procéder comme dans le § 15 pour trouver un résultat analogue.

Les résultats obtenus dans les §§ 16—18 peuvent encore être obtenus ici, si nous procédons de la même manière.

§ 21. Dans ce qui précède nous avons obtenu et examiné des séries $\Psi_{\mu\nu}(\zeta; tm)$ où t est positif. Cependant nous pouvons aussi former des séries $\Psi_{\alpha\nu}(\zeta; tm)$ avec t négatif. Ces séries convergent et ont aussi le caractère zéta-fuchsien. De même que les séries entières de Poincaré peuvent se développer par rapport à $\Psi_{\mu\nu}(\zeta; tm)$ avec t positif, les séries avec pôles de Poincaré peuvent se développer par rapport à $\Psi_{\mu\nu}(\zeta; -tm)$.

Posons

$$Z_{\mu\nu}(\zeta, a) = \sum_{i_1} \frac{A_{\mu\nu}^{i_1}}{(\zeta_{i_1} - a)^{2m} (\gamma_{i_1} \zeta + \delta_{i_1})^{2m}}$$

où a est à l'intérieur du cercle de l'unité.

Soit s une substitution parabolique et S une substitution dont l'équation fondamentale a des racines simples.

Nous avons donc

$$Z_{\mu\nu}(\zeta; a) = \sum_i \sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{A_{\mu\nu}^{(i)} m_\nu^t}{(\zeta_i - p)^{2m} (\gamma_i \zeta + \delta_i) r^{2m} (p - a)^{2m} (t + z_i - b)^{2m}}$$

Mais

$$\sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{m_\nu^t}{t + z_i - b} = 2\pi i \frac{e^{2\pi i \lambda_\nu (z_i - b)}}{e^{2\pi i (z_i - b)} - 1} = 2\pi i \frac{e^{2\pi i (z_i - b)(\lambda_\nu - 1)}}{1 - e^{-2\pi i (z_i - b)}}$$

Si l'on admet que ζ soit dans un polygone qui a p pour sommet et que a soit situé à l'intérieur d'un cercle passant par ζ , tangent au cercle fondamental en p , on doit trouver $\Im(z_i - b) < 0$, quelle que soit la valeur de i . Si a est différemment, ceci cesse d'être vrai.

Nous pouvons donc écrire

$$\sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{m_\nu^t}{t + z_i - b} = 2\pi i \sum_{t=1}^{t=\infty} e^{2\pi i (z_i - b)(\lambda_\nu - t)}$$

et par conséquent

$$\sum_{t=-\infty}^{t=+\infty} \frac{m_\nu^t}{(t + z_i - b)^{2m}} = -\frac{(2\pi i)^{2m}}{(2m-1)!} \sum e^{2\pi i (z_i - b)(\lambda_\nu - t)} (\lambda_\nu - t)^{2m-1}$$

Donc

$$(54) \quad Z_{\mu\nu}(\zeta; a) = \sum_{t=1}^{t=\infty} -\frac{(2\pi i)^{2m} (\lambda_\nu - t)^{2m-1} e^{-2\pi i t b (\lambda_\nu - t)}}{r^{2m} (p - a)^{2m}} \Psi_{\mu\nu}(\zeta; -tm)$$

On obtient un développement analogue lorsque l'équation fondamentale de S a des racines multiples.

Les séries $\Psi_{\mu\nu}(\zeta; -tm)$ sont entières à l'intérieur du réseau de polygones. Il faut accorder ici une attention particulière aux sommets paraboliques. Si nous

développons $\Psi_{\mu\nu}(\zeta; -tm)$ comme dans § 16 par rapport à $e^{\frac{2\pi i(\lambda + t)}{\zeta - p}}$ nous trouverons

$$(48_1) \quad \Psi_{\mu\nu}(\zeta; -tm) = \frac{e^{\frac{2\pi i(\lambda_\mu - t)}{r(\zeta - p)}} A_{\mu\nu}^{(0)}}{r^{2m} (\zeta - p)^{2m}} + \sum_{t=0}^{t=\infty} \frac{e^{\frac{2\pi i(\lambda_\mu + t)}{r(\zeta - p)}} C_t}{r^{2m} (\zeta - p)^{2m}}$$

D'après ce développement nous voyons que les sommets paraboliques ne peuvent plus être zéro mais deviennent infini comme

$$e^{\frac{2\pi i(\lambda_\nu - t)}{r(\zeta - p)}} \frac{1}{(\zeta - p)^{2m}}$$

Cela devient une généralisation des séries de Poincaré qui nécessairement avaient leur zéros en des sommets paraboliques.

Voyons maintenant ce qui se fasse lorsque s est elliptique

$$Z_{\mu\nu}(\zeta) = \sum_{i_1} \frac{A_{\mu\nu}^{(i_1)}}{(\zeta_{i_1} - a)(\gamma_{i_1}\zeta + \delta_{i_1})^{2m}} = \sum_i \sum_{t=0}^{l-1} \frac{A_{\mu\nu}^{(i)} K^{\sigma t} (p - p_1)^{2m}}{(a - p)^{2m} (\zeta_i - p_1)^{2m} (\gamma_i \zeta + \delta_i)^{2m} \left(K^{\frac{ta - p_1}{a - p}} \cdot \frac{\zeta_i - p}{\zeta_i - p_1} - 1 \right)^{2m}}$$

Si nous admettons que ζ soit dans le polygone qui a p pour sommet, a doit être situé à l'intérieur du cercle harmonique de pp_1 , passant par ζ , pour que $|z_i| > 1$ quelle que soit la valeur de i . Nous admettons que c'est ici le cas.

Nous écrivons

$$Z_{\mu\nu}(\zeta) = \sum_i \sum_{t=0}^{l-1} \frac{A_{\mu\nu}^{(i)} (p - p_1)^{2m} K^{t(\sigma - 2m)}}{(a - p_1)^{2m} (\zeta_i - p)^{2m} (\gamma_i \zeta + \delta_i)^{2m} \left(1 - \frac{K^{-t}}{z_i} \right)^{2m}}$$

Maïs

$$\sum_{t=0}^{l-1} \frac{K^{t(\sigma - 2m)}}{\left(1 - \frac{K^{-t}}{z_i} \right)^{2m}} = \frac{l}{(2m-1)!} \cdot \frac{1}{z_i^{\sigma_1}} \left[\frac{(2m + \sigma_1 - 1)!}{(\sigma_1 - 1)!} + \frac{(2m + \sigma_1 + l - 1)!}{(\sigma_1 + l - 1)!} \cdot \frac{1}{z_i^l} + \dots \right]$$

$$\sigma_1 \equiv \sigma - 2m \pmod{l} \quad 0 \leq \sigma_1 < l$$

par conséquent

$$Z_{\mu\nu}(\zeta) = \frac{(p - p_1)^{2ml}}{(2m-1)! (a - p_1)^{2m}} \sum_{t=0}^{l-1} \frac{(2m + \sigma_1 + tl - 1)!}{(\sigma_1 + tl - 1)!} \left(\frac{a - p}{a - p_1} \right)^{\sigma_1 + tl} \Psi_{\mu\nu}(\zeta; -tm)$$

où

$$\Psi_{\mu\nu}(\zeta; -tm) = \sum_i \frac{A_{\mu\nu}^{(i)}}{(\zeta_i - p)(\gamma_i \zeta + \delta_i)^{2m}} \left(\frac{\zeta_i - p}{\zeta_i - p_1} \right)^{-(\sigma_1 + tl)}$$

Ou voit immédiatement que $\Psi_{\mu\nu}(\zeta; -tm)$ est une série zétafuchsienne dont le seul pôle est $\zeta = p$ et les points équivalents. Le pôle est de l'ordre $\frac{2m + \sigma_1}{l} + t$. Une série de cette nature peut cependant être formée par les séries de Poincaré et nous n'obtenons par conséquent aucune généralisation.



